Calcalas sa Chéad Seimistear (MA102) : Nótaí na Léachtanna

Dr Rachel Quinlan
Scoil na Matamaitice, na Statisticí agus na Matamaitice Feidhmí, OÉ Gaillimh

November 6, 2013

Contents

Chapter 1

Feidhmeanna ar na Réaduimhreacha

1.1 Na Réaduimhreacha

Tugtar an t-ainm "réaduimhracha" do na na huimhreacha a léiritear mar dheachúílí.

Mar shampla is réaduimhreacha iad

$$\begin{aligned} 3 &= 3.0\ldots \\ 3\tfrac{1}{4} &= 3.25 \\ -3\tfrac{1}{3} &= -3.333\bar{3} \\ \pi &\approx 3.1415926535\ldots \end{aligned}$$

Úsáidtear an siombail $\mathbb{R}$ chun tacar na réaduimhreacha a chur in iúl. Istigh i $\mathbb{R}$ faightear na *huimhreacha cóimheasta* agus na slánuimhreacha. Deirtear go bhfuil réaduimhir áirithe *cóimheasta* mas féidir í a scríobh san fhoirm $\frac{a}{b}$ ionas gur slánuimhreacha iad a agus b (le $b \neq 0$, ar ndóigh). An nodaireacht seo a leanas atá i bhfeidhm.

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$: na *slánuimhreacha deimhneacha*, nó na *huimreacha aiceanta*.
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$: na *slánuimhreacha*.
- $\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} : \ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$: na *huimhreacha cóimheasta*
  Nóta faoin nodaireacht seo : ciallaíonn an ráiteas thuas gur iad na huimhreacha den fhoirm $\frac{a}{b}$ do slánuimhreacha a agus b agus $b \neq 0$ na baill den *tacar* $\mathbb{Q}$. Mar shampla, is baill iad na huimhreacha seo a leanas den tacar $\mathbb{Q}$:
  $$2\ \left(= \frac{2}{1}\right),\ \frac{1}{3},\ \frac{7}{5},\ -\frac{20}{3},\ 0\ \left(= \frac{0}{1}\right).$$
- $\mathbb{R}$: na *réaduimhreacha*.
  Ní hionann iad na *réaduimhreacha* agus na huimreacha cóimheasta. Is réaduimhir í gach uimhir cóimheasta, ach tá réaduimhreacha ann nach bhfuil cóimheasta. Mar shampla, feicfimid thíos nach féidir an réaduimhir $\sqrt{2}$ a scríobh san fhoirm $\frac{a}{b}$ le slánuimhreacha a agus b.
- $\mathbb{C}$: na *huimhreacha choimpléascacha*.
  Is uimhir den fhoirm $x + iy$ í *uimhir chompléascach*, le $i^2 = -1$.

Ní bheidh mórán baint againn leis na huimhreacha chompléaschacha ins an chúrsa seo, ach beidh na huimhirchórais eile go léir tábahachtach dúinn. Tá sé riachtanach go mbeidh tuiscint maith againn orthu go léir agus go mbeimid in ann na siombail $\mathbb{N}, \mathbb{Z},\ \mathbb{Q}$ agus $\mathbb{R}$ a úsáid gan iad a chur trí chéile.

Anois, tá sé in am dúinn ár gcéad teoirim a léiriú.

Teoirim 1.1.1. *Ní uimhir cóimheasta í $\sqrt{2}$.*

Proof. Cuir i gcás go bhfuil $\sqrt{2}$ cothrom le $\frac{p}{q}$, le slánuimhreacha áirithe p agus q ($q \neq 0$) gan comhfactóirí. (Ciallaíonn an ráiteas sin go bhfuil an codán $\frac{p}{q}$ scríofa i dtéarmaí chomh simplí agus is féidir). Ansin, tá ceann amháin de p, q ar a mhéad réidh agus tá an dara ceann corr. Anois

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \Longrightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Longrightarrow p^2 = 2q^2.$$

Ansin, is ré-uimhirí p^2 agus dá bhrí sin tá p réidh chomh maith. Ach má tá p réidh, is iolraí de 4 é p^2 (smaoinigh ar seo). Ach más iolraí de 4 é p^2, is féidir linn a scríobh $p^2 = 4p'$ do slánuimhir éigin p'. Ansin

$$p^2 = 2q^2 \Longrightarrow 4p' = 2q^2 \Longrightarrow q^2 = 2p'.$$

Ach ansin is ré-uimhir í q^2, agus dá bhrí sin is ré-uimhir í q. Níl aon chiall le seo, áfach, mar tá sé socraithe againn cheana go bhfuil ceann amháin de p agus q réidh, ar a mhéad.

An t-aon cinneadh atá fágtha dúinn ansin ná go raibh an samhlú go bhfuil $\sqrt{2}$ cóimheasta mícheart sa chéad áit. □

Tá sé cruthaithe thuas againn gur uimhir *éagóimheasta* í $\sqrt{2}$. Samplaí eile de huimhreacha éagóimheasta iad $\sqrt{5}$ agus π. Tá a lán uimhreacha cóimheasta agus éagóimheasta i measc na réaduimhreacha, agus tá siad meascaithe le chéile ar fud an uimhirlíne.

Tá sé deacair go leor a léiriú go bhfuil an uimhir π éagóimheasta, ach is féidir réasúnaíocht cosúil le cruthú Teoirim 1.1.1 a úsáid chun taispeáint nach bhfuil na huimhreacha $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$ srl. cóimheasta.

Fadhb 1.1.2.

1. *Cruthaigh go bhfuil an uimhir $\sqrt[3]{2}$ éagóimheasta.*
2. *Cruthaigh go bhfuil an uimhir $\sqrt{5}$ éagóimheasta.*

Ordghaol na Réaduimhreacha

Más réaduimhreacha iad x agus y, deirtear go bhfuil x *níos lú ná* y (scríobh $x < y$) má tá x ar an taobh chlé de y ar an uimhir líne. Is féidir $x \leqslant y$ a scríobh má tá x níos lú ná y nó má tá x cothrom le y. Tá an ciall céanna ag na an céad dá ceann agus ag an dara dá ceann de na ráiteasaí seo thíos.

- $x < y$
- $y > x$
- $x \leqslant y$
- $y \geqslant x$

Má tá $x \leqslant y$ agus $y \leqslant x$ do na réaduimhreacha céanna x agus y, ciallaíonn sé seo go bhfuil $x = y$.

Tá an ordghaol céanna i bhfeidhm i $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ agus $\mathbb{N}$, ach níl ordghaol ar bith i bhfeidhm i $\mathbb{C}$. 'Sé sin, más uimhreacha coimpléascacha iad z_1 agus z_2 (agus nach réaduimhreacha iad), níl aon ciall ag baint leis an ráiteas $z_1 \leqslant z_2$ nó ráiteas ar bith den fhoirm sin.

Feidhmeanna

Cuir i gcás gur tacair éigin iad A agus B. Tá seans ann gur réaduimhreacha iad na baill de A nó B ach is cuma. Tá seans ann freisin gur ionann iad A agus B ach is cuma.

Sainmhíniú 1.1.3. *Ciallaíonn an ráiteas gur feidhm í* f *ó* A *go* B *(scríofa* $f : A \to B$ *go bhfuil ball áirithe* $f(x)$ *de* B *nascaithe le gach ball* x *den tacar* A*.*

Is féidir feidhm ó A go B a shamhlú mar feithicil a sheolann gach ball den tacar A go ball áirithe den tacar B. Ins an sainmhíniú seo, is cuma an bhfuil gach ball de B nascaithe le ball éigin de A nó nach bhfuil. Má tá áfach, deirtear go bhfuil an feidhm f *barrtheilgeach*.

Sampla 1.1.4. *Más é* A *an tacar a chuimsíonn na mic léinn go léir i OÉ Gaillimh, agus más é* B *an tacar de na chursaí go léir atá ar fáil in OÉ Gaillimh, tá feidhm* $f : A \to B$ *ann a thugann go gach mac léinn an chúrsa atá á dhéanamh aige no aici. Don feidhm seo, is féidir linn a rá*

$$f(\textit{Ciara}) = \textit{Mata agus Oideachas}, \quad f(\textit{Eamonn}) = \textit{Mata Airgeadais agus Éacnamaíocht},$$

agus mar sin de.

Sampla 1.1.5. *Is féidir feidhm* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a shainmhíniú mar seo*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{má tá } x \text{ deimhneach} \\ 0 & \text{má tá } x = 0 \\ -1 & \text{má tá } x \text{ diúltach} \end{cases}$$

Tá sé soiléir nach feidhm barrtheilgeach í an f seo, mar níl ina íomhá ach na baill $-1, 1$ agus 0.

Sainmhíniú 1.1.6. *Más feidhm í* f *ó* A *go* B*, glaotar* íomha f ($\mathrm{Im}(f)$*) ar an tacar* $\{f(x) : x \in A\}$*. Is fo-thacar de* B *í* $\mathrm{Im}(f)$*.*

Cuimsíonn íomhá f na baill de B a "thagann" ó A de réir an fheidhm f.

Sampla 1.1.7. *Is féidir feidhm* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *a shainmhíiú mar seo :*

$$g(x) = x^2 - 2, \text{ do gach } x \in \mathbb{R}.$$

Ansin mar shampla, is féidir luachanna de g *ag pointí áirithe a scríobh. Mar shampla*

$$g(2) = 2^2 - 2 = 2, \; g(-2) = (-2)^2 - 2 = 2, \; g(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 - 2 = 2 - 2 = 0,$$

agus mar sin de.

Nóta: Tá $x^2 \geqslant 0$ do gach réaduimhir x, agus dá bhrí sin tá $x^2 - 2 \geqslant -2$ do gach réaduimhir x. Ar an taobh eile, más réaduimhir í c le $c \geqslant -2$, is féidir an cothromóid $x^2 - 2 = c$ a réitiú, mar shampla le $x = \sqrt{c+2}$. Ansin tá $g(\sqrt{c+2}) = c$, agus is féidir linn a rá go bhfuil c ins an tacar $\mathrm{Im}(g)$. Cuimsíonn $\mathrm{Im}(g)$ na réaduimhreacha go léir atá $\geqslant -2$. Is féidir an tacar seo a scríobh mar $[-2, \infty)$. Tá an nodaireacht seo go han-tábhachtach sa Chalcalas.

Sainmhíniú 1.1.8. *Tugtar* eatramh *ar fo-thacar de na réaduimhreacha a chuimsíonn píosa cónasctha den uimhirlíne.*

Is féidir le heatramh bheith *cuimsithe* (mar shampla eatramh ó -2 go 3, no *éaguimsuithe*, mar shampla an tacar $[-2, \infty)$. Má tá eatramh cuimsithe, deirtear go bhfuil sé *dúnta* má tá na críochphointí cuimsithe ann, nó oscailte mura bhfuil. Is féidir le eatramh bheith dúnta ar taobh amháin agus oscailte ar an taobh eile. Úsáidtear an nodaireacht speisialta ins na samplaí thíos chun eatraimh oscailte agus dúnta a léiriú.

1. $[1, 3] = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leqslant x \leqslant 3\}$: an eatramh dúnta ó 1 go 3 - is baill iad 1 agus 3 den tacar seo.

2. $(1, 3) = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 3\}$: an eatramh oscailte ó 1 go 3 - níl na huimhreacha 1 agus 3 ins an tacar seo, and tá 1.0000001 agus 2.999999 ann.

3. $[1, 3) = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leqslant x < 3\}$: eatramh leath-oscailte ó 1 go 3 - tá 1 ins an tacar seo, ach níl 3 ann.

4. $(1, 3] = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x \leqslant 3\}$: eatramh eile leath-oscailte ó 1 go 3 - tá 3 ins an tacar seo, ach níl 1 ann.

5. $(-\infty, 3) = \{x \in \mathbb{R}, x < 3\}$: níl 3 ins an tacar seo, ach tá gach réaduimhir atá níos lú ná 3 ann.

Tabhair aire do na lúibíní ciorclacha agus cearnacha atá in usáid anseo chun na heatraimh go léir a léiriú. Ciallaíonn lúibín cearnaithe go bhfuil an críochphointe ins an tacar agus lúibín ciorlacha nach bhfuil.

Is féidir nodaireacht mar "$\cup$" (aontas) agus "$\cap$" (idirmhír) a úsáid chun tacair (eatraimh mar shampla) a chur le chéile agus chun tacair nua a dhéanamh eatarthu.

Sainmhíniú 1.1.9. *Más tacair ar bith iad* A *agus* B*, tá na tacair* $A \cup B$ *agus* $A \cap B$ *sainmhínithe mar a leanas.*

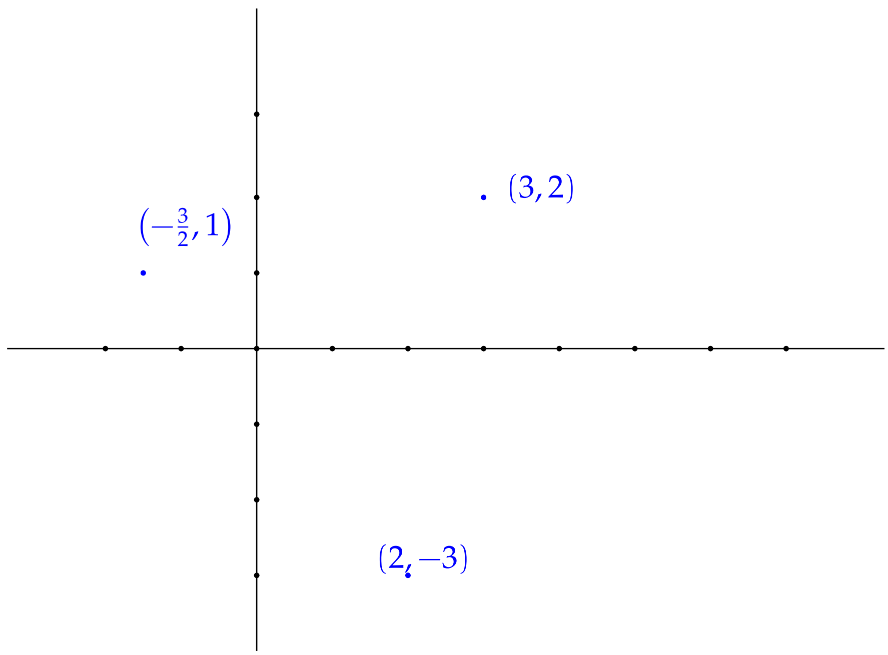
- $A \cup B := \{x : x \in A \text{ nó } x \in B\}$.
  Is ball é x *de* $A \cup B$ *más ball é de* A nó *más ball é de* B.

- $A \cap B = \{x : x \in A \text{ agus } x \in B\}$.
  Cuimsíonn an tacar $A \cap B$ *na baill amháin atá in* A *agus i* B.

1.2 Graif

Tugtar an t-ainm $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}$-dó) don phlána Cairtéasach. Is tacar é an plána seo atá éigríochta agus éaguimisthe, agus léirítear é de ghnáth le péire aiseanna, an X-ais (cothrománach) agus an Y-ais (ceartingearach).

Is féidir pointe ar bith ins an phlána a léiriú ansin le ordphéire de réaduimhreacha, sin an X-chomhordanáid sa chéad ionad agus an Y-chomhordanáid sa dara hionad.



Tá an plána Cairtéasach (nó *plána chomhordanáideach*) an-tábhachtach agus an úsáideach ar fud na matamaitice. René Descartes a chum é ins an 17ú céad. An tábhacht a bhaineann leis ná go dtugann sé nasc dúinn idir cothromóidí agus pictiúirí, nó idir an geoiméadracht agus an ailgéabar. Mar shampla, gan an plána, níl ins an ráiteas $x + 2y = 4$ ach cothróimóid. Nuair atá an plána againn áfach, is féidir linn pictiúr a tharraingt de na pointí a shásaíonn an cothromóid, agus an cothromóid a shamhlú mar *líne*. 'Sé sin, tugann an plána chomhordanáideach tuiscint geoiméadrach dúinn faoi rudaí a bhaineann le hailgéabar, agus a mhalairt. Ní amháin cothromóidí simplí ar nós $x + 2y = 4$ atá i gceist, ach cothromóidí níos casta chomh maith, mar shampla $x^2 + y^3 = 3$. Más féidir linn pictiúr a tharraingt de na pointí a shásaíonn an cothromóid seo agus a fháil amach cén sórt cosúlacht atá i gceist (cé go bhfuil an tasc sin deacair go leor), beidh tuiscint radharcach againn ar an gcothromóid sin chomh maith le tuiscint ailgéabrach.

Ins a chúrsa seo, beidh an plána úsáideach dúinn go príomha chun graif de feidhmeanna éagsúla a shamhlú agus a tharraingt. Tabharfaidh sé seo tuiscint radharcach dúinn ar na feidhmeanna atá á phlé againn. Ar dtús ní foláir cur síos soiléir a bheith againn ar an bhrí a bhaineann leis an dtéarma *graf*.

Sainmhíniú 1.2.1. *Más feidhm í* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, tugtar* graf f *ar an fothacar*

$$\{(x, y) : y = f(x)\}$$

de $\mathbb{R}^2$*. Ansin, is fothacar é an graf den phlána, agus cuimsíonn sé na pointí* (x, y) *ionas gur é an* y*-chomhordanáid íomhá an* x*-chomohordanáid faoin fheidhm* f*.*

Is sainmhímiú teicniciúil go leor é sin, ach is féidir linn an graf a shamhlú mar phictiúr den fheidhm, a léiríonn iompar na feidhme nuair atá an athróg x ag gluaiseacht ar fud an uimhirlíne.

Sampla 1.2.2. *Tá* f *sainmhínithe leis an fhoirmle* $f(x) = \frac{1}{x}$*. Tarraing pictiúir de graf* f*.*

Réiteach agus Trácht: Is féidir smaoineamh ar na phointí thíos.

1. Cuimsíonn fearann na feidhme seo na réaduimhreacha go léir *ach amháin 0*. Níl aon ciall ag baint leis an ráiteas $\frac{1}{x}$ nuair atá $x = 0$. Ansin, ní féidir an fheidhm a luacháil ag $x = 0$ agus ní aon pointe ins an ghraf le 0 mar x-chomhordanáid.

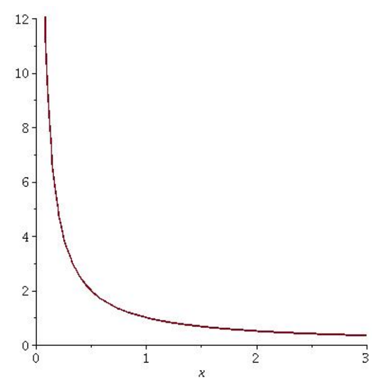
2. Tá $\frac{1}{x}$ deimhneach nuair atá x deimhneach, agus tá $\frac{1}{x}$ diúltach nuair atá x diúltach. Ansin, tá an graf cuimsithe ins an chéad agus an triú ceathramhán den phlána (thuas ar dheis agus thíos ar chlé).

3. Nuair atá x deimhneach agus mór (mar shampla $x > 1000$, tá $\frac{1}{x}$ deimhneach agus tá sé go han-bheag. Nuair a théann x thar an uimhirlíne ins an dtreo deimhneach, tá $\frac{1}{x}$ ag laghdú agus ag druidim le 0, tá graf na feidhme seo an-ghar leis an X-ais anseo, ach ní teagmhaíonn sé leis an X-ais riamh.

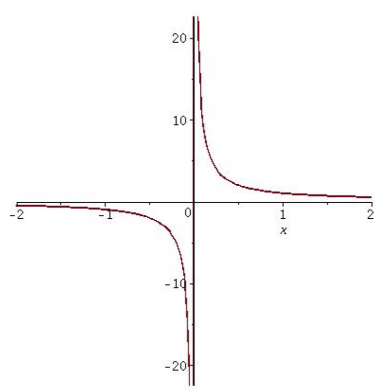
   Nuair atá x deimhneach ach an-bheag, tá $f(x)$ deimhneach agus an-mhór. Mar shampla tá $f(0.01) = 100$ agus $f(0.001) = 1000$ agus mar sin de. Ansin, nuair atá x deimhneach ach an-ghar le 0, tá graf f an-ghar leis an Y-ais ach ní teagmhaíonn sé leis riamh.

   Dá bhrí sin, nuair atá x deimhneach agus ag seoladh amach ó 0 ins an treo deimhneach, tá $f(x)$ an-mhór ar dtús ach ag laghdú go tapaidh, tá $f(1) = \frac{1}{1} = 1$, agus an sin leanann $f(x)$ ar aghaidh ag laghdú agus ag laghdú, ach ní schroicheann sé 0.

   Tá graf an scéal seo léirthe thíos.



4. Ar an taobh eile, is cosúil é an scéal, ach caithfear smaoineamh go bhfuil $f(x)$ diúltach nuair atá x diúltach. Tá pictiúr den ghraf iomlán thíos.



Na Feidhmeanna Triantánúla

Tugtar an *aonadciorcal* ar an ciorcal i $\mathbb{R}^2$ le lár ag $(0,0)$ agus le ga 1. Ansin, is é $x^2 + y^2 = 1$ cothromóid an aonadciorcal; cuimsíonn sé na pointí go léir a shásaíonn an cothromóid sin. Ní le triantáin i ndáiríre a baineann na feidhmeanna triantánúla ach le comhardanáidí ar an aonadciorcal. Tá na sainmhínithe seo a leanas go han-tábhachtach dúinn, agus is fiú tamall a chaitheamh chun tuiscint a fhorbairt orthu.

Sainmhíniú 1.2.3. *Abair gur réaduimhir deimhneach é* x*. Tosaigh ag an bpointe* $(1,0)$ *ag taisteal timpeall an aonadciorcal i dtreo tuathalach. Stop tar éis taisteal ar feadh achar* x *timpeall an ciorcal. Anois tá tú fós ag pointe ar an gciorcal. Tugtar* $\cos x$ *(sin comhshíneas* x*) ar* X*-comhardanáid an pointe seo, agus tugtar* $\sin x$ *(sin síneas* x*) ar a* Y*-chomordanáid.*

Má tá x *diúltach, sainmhíítear* $\cos x$ *agus* $\sin x$ *mar an gcéanna, ach amháin go bhfuilimid ag taisteal ó* $(1,0)$ *ins an dtreo deiseal.*

Sampla 1.2.4.

1. *Chun* $\cos 0$ *a fháil amach níl le déanamh againn ach fanacht ag an bpointe* $(1,0)$ *agus féachaint ar an* X*-comhordanáid, sin 1. Ansin,*

$$\cos(0) = 1.$$

2. *Is* 2π *é imlíne an aonadciorcal. Mar sin, tar éis taisteail a feadh achar* 2π *timpeall an aonadciorcal, táimid ar ais ag an pointe* $(1,0)$ *agus is féidir linn a rá*

$$\cos 2\pi = 1.$$

3. *Tar éis taisteal ar feadh achar* π *timpeall an aonadciorcal, táimíd ag an bpointe* $(-1,0)$*, ansin tá*

$$\cos \pi = -1.$$

CEISTEANNA DON LÉACHT

1. Céard é $\sin 0$?
2. Céard é $\sin 2\pi$?
3. Céard é $\sin \pi$?
4. Céard é $\cos \frac{\pi}{2}$?
5. Céard é $\sin \frac{\pi}{2}$?

NÓTA: Tá sé an-deacair na feidhmeanna cos agus sin a luacháil ag pointí áirithe, mar shampla $1, 2, 3$ srl. Níl foirmle nó córas againn chun luacháil mar seo a dhéanamh, ach is féidir linn an bhrí a bhaineann le $\sin 1$, $\cos 2$ srl a thuiscint de réir Sainmhíiú 1.2.3.

Céard faoi graf na feidhme cos? Conas is féidir é a tharraignt agus cén cruth atá air? Is féidir linn cúpla pointí a thabhairt faoi deara.

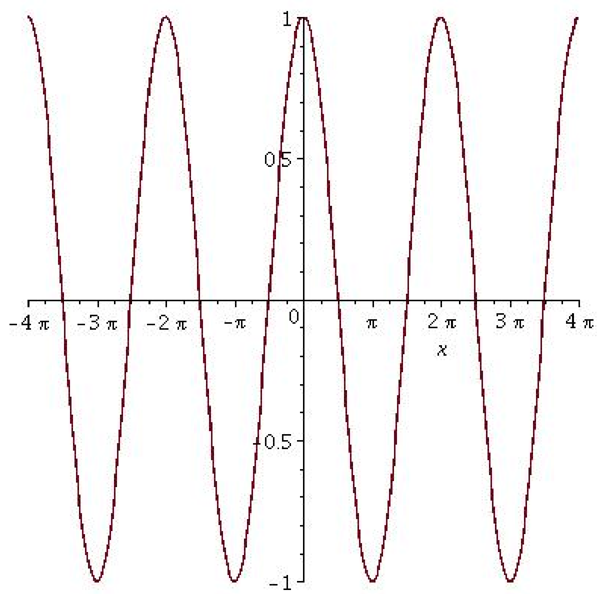
1. Is an uimhirlíne iomlán é fearann na feidhme cos. Is féidir $\cos x$ a shainmhíniú do *gach* réaduimhir x. Ansin, nílimíd ag súil le "bearnaí" ins an ngraf.

2. Tá na luachanna de $\cos x$ go léir idir -1 agus 1, mar is comhordanáidí iad do phointí atá ar an aonadciorcal. Mar sin, beidh an graf go léir cuimsithe idir an líne $y = -1$ agus an líne $y = 1$. Is fédir linn a fheiceáil go bhfuil luachanna deimhneacha agus diúltacha ag $\cos x$, mar tá pointí ar an aonadciorcal le X-comhordanáidí deimhneacha agus diúltacha.

3. Má táimid ag pointe ar bith P ar an aonadciorcal, beimid ar ais ag P tar éis taisteal de achar 2π sa treo tuathalach (no deiseal). Ansin, tá sé soiléir go bhfuil $cos 1 = \cos(1 + 2\pi)$, go bhfuil $\cos 2 = \cos(2 + 2\pi)$, agus go ghinearáta go bhfuil $\cos x = \cos(x + 2\pi)$ do réaduimhir ar bith x.

   Deirtear go bhfuil an fheidhm cos periadach le periad 2π

Chun a graf a tharraingt ansin, is féidir linn tosnú ag $x = 0$. Chun $\cos 0$ a luacháil, ní foláir X-chomhordanáid an phointe $(1, 0)$ a scríobh : sin 1. Nuair atá x ag méadú ó 0 go $\frac{\pi}{2}$, táimid ag gluaiseacht timpeall an aonadciorcal sa treo tuathalach, agus tá ár X-chomhordanáid ag laghdú ó 1 go 0. Nuair a leanaimid ar aghaidh thar $\frac{\pi}{2}$, tá an X-chomhordanáid diúltach agus tá sé ag laghdú fós. Nuair a schroichimid π feicimid go bhfuil $\cos \pi = -1$, agus ansin tosaíonn $\cos x$ ag méadú arís. Leanann sé ar aghaidh ag méadú ansin, tá $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$ agus nuair a fillimid go $(1, 0)$, tá turas de achar 2π déanta againn, táimíd ar ais ag an tosach agus feicimid go bhfuil $\cos 2\pi = 1$ arís. Is féidir linn an eolas go léir a chur ins an graf thíos.



CEIST (DEACAIR) DON LÉACHT: Tarraing graf de $\sin x$. If féidir an stráitéis cúramach céanna a úsáid.

1.3 Teorainn agus Leanúnachas

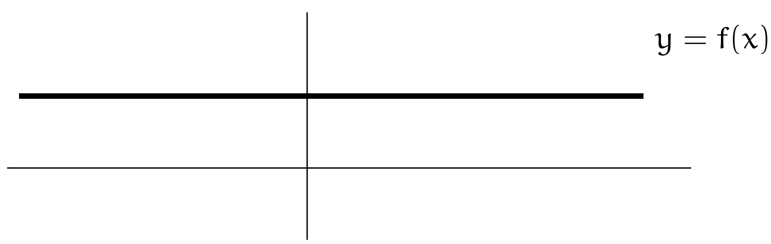
Sampla 1.3.1. *Sainmhinítear na feidhmeanna* f *agus* g *mar a leanas.*

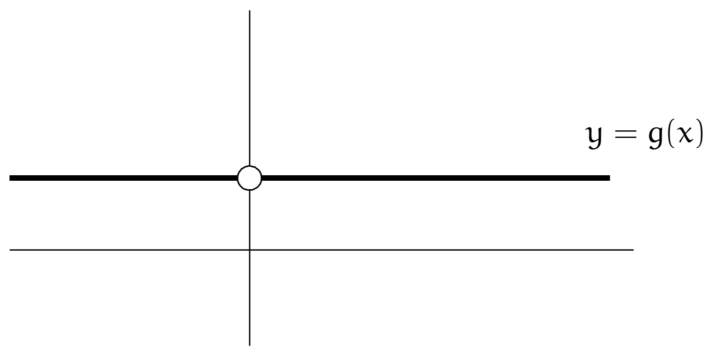
$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \text{ do gach } x \in \mathbb{R}. \\ g(x) &= \frac{x}{x} \text{ do } x \neq 0. \end{aligned}$$

An ionann iad na feidhmeanna f *agus* g*?*

FREAGRA Ní ionann iad f agus g, cé go bhfuil siad an-cosúil lena chéile. Tá f sainmhínithe ar na réaduimhreaca go léir agus is feidhm tairiseach í leis an luach 1.

An foirmle $\frac{x}{x}$ a shainmhíníonn an feidhm g. Is ionann $\frac{x}{x}$ agus 1, *ach amháin* má tá $x = 0$. Sa chás sin, ní ráiteas ciallmhar é $\frac{x}{x}$ agus níl aon luach ag baint leis. Dá bhrí sin, tá difríocht idir na feidhmeanna seo ag an bpointe $x = 0$ amháin. Tá $f(0) = 1$, ach níl $g(0)$ sainmhínithe. Tá léaráidí thíos de ghraf f agus graf g.





Ciallaíonn an ciorcal bán ins an dara graf go bhfuil bearna ins an graf ag an bpointe $x = 0$.

Nóta: Ta iompar na feidhmeanna f agus g mar an gcéanna ar fud an uimhirlíne ach amháin ag an bpointe $x = 0$. Go háirithe, nuair atá x ag druidim an-ghar le 0, ón taobh deis nó ón taobh chlé, tá na feidhmeanna f agus g cothrom, mar tá $\frac{x}{x}$ cothrom le 1 ag gach pointe ach amháin 0.

Deirtear go bhful

$$\operatorname*{Tr}_{x \to 0} g(x) = 1.$$

Is féidir an ráiteas seo a léamh mar "*tá teorann* f*, agus* f *ag druidim le* 0*, cothrom le* 1". Ins an sampla seo, cuireann an ráiteas seo in iúl go bhfuil iompar na feidhme g díreach cosúil le iompar na feidhme tairiseach f i gcomharsanacht timpeall 0. Cé nach bhfuil an dá feidhm mar an gcéanna ag an pointe $x = 0$, tá siad mar an gcéanna i dtimpeallacht 0, agus mar sin tá an *teorann* céanna ag $x = 0$ acu.

Sainmhíniú 1.3.2. *Más feidhm í* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, deirtear go bhfuil* f *leanúnach ag an bpointe* $x = 2$ *má tá graf* f *cónasctha ag an pointe atá ann le* X*-comhordanáid* 2*.*

Tá an sainmhíniú seo beagán garbh, ach an ciall atá ann ná nach mbeadh bearna nó briseadh nó "léim" ins an ghraf ag an bpointe $x = 2$. Mar shampla tá an fheidhm $f_1(x) = x^2$ leanúnach ag $x = 2$. Má shainmhínitear feidhm f_2 mar a leanas áfach, ní bheidh sí leanúnach ag $x = 2$ mar beidh "léim" ina graf ag an bpointe sin:

$$f_2(x) = \begin{cases} x & x \leqslant 2 \\ x^2 & x > 2 \end{cases}$$

Is féidir coincheap an teorainn a thuiscint go garbh mar seo : má tá

$$\operatorname*{Tr}_{x \to 2} f(x) = 4$$

ní amháin go bhfuil $f(x)$ ag druidim le 4 nuair atá x ag druidim le 2, ach is é 4 an luach a bhéadh ag f ag $x = 2$, *dá mbéadh* f *leanúnach ag an bpointe sin*.

Tá roinnt samplaí thíos a bhainneann le teorainn.

Sampla 1.3.3. *Ríomhaigh an teorann*

$$\operatorname*{Tr}_{x \to 3} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$$

Réitiú: Ins an sample seo táimid ag samoineamh ar iompar $\frac{x^2-1}{x^2-4}$ i dtimpeallacht $x = 3$. Is sampla éasca go leor é an ceann seo, mar níl aon fadhb le $\frac{x^2-1}{x^2-4}$ i dtimpeallacht $x = 3$. Is féidir an foirmle seo a luacháil do gach réaduimhir x ach amháin nuair atá $x^2 - 4 = 0$, sin $x = 2$ agus $x = -2$. Nuair atá $x = 3$, is féidir $x = 3$ a chur díreach ins an fhoirmle chun fail amach

$$\operatorname*{Tr}_{x \to 3} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4} = \frac{3^2 - 1}{3^2 - 4} = \frac{8}{5}.$$

Sampla 1.3.4. *Ríomhaigh an teorann*

$$\operatorname*{Tr}_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$$

Réitiú: Tá an sampla seo cosúil go leor leis an gceann thuas. Ins an chás seo, is féidir linn 1 a chur in áit x arís, agus faighimid

$$\operatorname*{Tr}_{x \to 1} \frac{1^2 - 1}{1^2 - 4} = \frac{0}{-3} = 0.$$

Sampla 1.3.5. *Ríomhaigh an teorann*

$$\operatorname*{Tr}_{x \to -2} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$$

Réitiú: Tá difríocht idir an sampla seo agus na samplaí thuas. Ins an chás seo, ní féidir linn -2 a chur in áit x ins an bhfoirmle, mar faighimid

$$\frac{(-2)^2 - 1}{(-2)^2 - 4} \sim \frac{-5}{0}.$$

Is 0 é luach an t-ainmneora nuair atá $x = -2$, ansin ní féidir $\frac{x^2-1}{x^2-4}$ a luacháil ag an bpointe seo. Nuair atá x ag druidim le -2, tá $x^2 - 4$ ag druidim le 0 agus tá $x^2 - 1$ deimhneach. Ansin, tá

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$$

ag méadú go han-tapaigh nuair atá x gar le -2 agus ag druidim le -2. Tá $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$ éaguimsithe ag $x = -2$ agus ní féidir an teorann a luacháil ag an bpointe sin. Deirtear nach bhfuil *aon teorann ann*, nó go bhfuil $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 4}$ ag dul go *éigríoch*.

Sampla 1.3.6. *Ríomhaigh an teorann*
$$\operatorname*{Tr}_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$$
Réitiú: Is sampla difriúl arís é seo. Anois nuair a chuirear 3 in áit x faightear
$$\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}\to\frac{(3)^2-9}{3^2-5(3)+6}\sim\frac{0}{0}.$$
Níl ciall ar bith ag baint leis an ráiteas $\frac{0}{0}$, agus ní thugann an iarracht thuas eolas ar bith dúinn faoi iompar $\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$ i dtimpeallacht 3. Níl a fhios againn ag an bpointe seo an féidir an teorann seo a ríomhaigh nó nach féidir. Is féidir linn féachaint ar an bhfoirmle atá i gceist chun a fadhb seo a réitiú. Is féidir linn an uimhreoir agus an ainmneoir a fhactóiriú agus feicimid go bhfuil $x-3$ mar factóir ins an dá ceann acu. Ansin,
$$\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\frac{(x+3)(x-3)}{(x-2)(x-3)}.$$
Nuair nach bhfuil $x=3$, is féidir linn an factóir $x-3$ a cheallú thuas, chun $\frac{x+3}{x-2}$ a fháil. Tá na ráiteas $\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$ agus $\frac{x+3}{x-2}$ mar an gcéanna *nuair atá* $x\neq 3$. Níl siad mar an gcéanna nuair atá $x=3$, ach tá siad mar an gcéanna nuair atá x ag druidim le 3. Níl aon fadhb ag baint le luacháil $\frac{x+3}{x-2}$ ag $x=3$. Ansin
$$\operatorname*{Tr}_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\operatorname*{Tr}_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{(x-2)(x-3)}=\operatorname*{Tr}_{x\to 3}\frac{x+3}{x-2}=\frac{3+3}{3-2}=6.$$

Sampla 1.3.7. *Ríomhaigh an teorann*
$$\operatorname*{Tr}_{h\to 3}\frac{\sqrt{3h-5}-2}{h-3}$$
Réitiú: Ar dtús, cuir 3 in áit x agus féach an féidir luach a fháil amach. Faightear
$$\frac{\sqrt{4}-2}{3-3}\sim\frac{0}{0}.$$
Ní thugann an iarracht seo aon eolas dúinn faoi iompar na feidhme timpeall $h=3$. Caithfimid rud éigin eile a dhéanamh, mar ní féidir an fheidhm $\frac{\sqrt{3h-5}-2}{h-3}$ a luacháil ag an bpointe $h=3$. I samplaí mar seo, le codáin a bhaineann le surda (no fréamhacha cearnacha), bíonn sé feiliúnach go minic an codán a iolrú faoi "surda comhchuingeach". Ins an sampla seo, is $\sqrt{3h-5}-2$ atá i gceist, agus $\sqrt{3h-5}+2$ atá mar comhchuingeach don surda seo. Is féidir linn an fheidhm a athscríobh mar a leanas (níl á dhéanamh anseo ach iolrú faoi 1):
$$\frac{\sqrt{3h-5}-2}{h-3}=\frac{\sqrt{3h-5}-2}{h-3}\times\frac{\sqrt{3h-5}+2}{\sqrt{3h-5}+2}=\frac{(3h-5)-4}{(h-3)(\sqrt{3h-5}+2)}=\frac{3h-9}{(h-3)(\sqrt{3h-5}+2)}.$$
Anois tá
$$\operatorname*{Tr}_{h\to 3}\frac{\sqrt{3h-5}-2}{h-3}=\operatorname*{Tr}_{h\to 3}\frac{3h-9}{(h-3)(\sqrt{3h-5}+2)}.$$
Má cuirimid $h=3$ ins an dara foirmle anseo, faighimid $\frac{0}{0}$ fós. Ach anois is féidir linn an factóir $h-3$ a cheallú chun an deacracht seo a réitiú.
$$\operatorname*{Tr}_{h\to 3}\frac{3h-9}{(h-3)(\sqrt{3h-5}+2)}=\operatorname*{Tr}_{h\to 3}\frac{3(h-3)}{(h-3)(\sqrt{3h-5}+2)}=\operatorname*{Tr}_{h\to 3}\frac{3}{(\sqrt{3h-5}+2)}=\frac{3}{\sqrt{4}+2}=\frac{3}{4}.$$

Sampla 1.3.8. *Ríomhaigh an teorann*
$$\operatorname*{Tr}_{x\to 0}\frac{|x|}{x}.$$

Réitiú: Cuimhnigh gur *luach uimhriúil* x atá i gceist leis an nodaireacht $|x|$. Is é $|x|$ an fhad idir an bpointe x agus 0 ar an uimihirlíne, ansin tá $|x| = x$ má tá $x \geqslant 0$, agus tá $|x| = -x$ (sin uimhir deimhneach) má tá $x < 0$.

Céard faoi $\operatorname*{Tr}_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$?

Ní féidir an fhoirmle $\frac{|x|}{x}$ a luacháil ag $x = 0$. Nuair atá x deimheach, tá $\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$.
Nuair atá x diúltach, tá $\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$
Ansin, is féidir cur síos mar seo a thabhairt :

$$\frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{nuair atá} \quad x > 0 \\ -1 & \text{nuair atá} \quad x < 0 \end{cases}$$

Nuair atá x ag druidim le 0 ón taobh chlé tá an luach tairiseach -1 ag $\frac{|x|}{x}$, agus ansin tá -1 mar luach ag an dteorann ón taobh chlé. Deirtear

$$\operatorname*{Tr}_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1,$$

chun an scéal seo a chur in iúl (tabhair faoi deara an forscript "$-$" i "$x \to 0^-$").
Ón taobh dheis áfach, tá pictiúr eile againn. Tá 1 mar luach tairiseach ag $\frac{|x|}{x}$ nuair atá x deimhneach, agus ansin tá 1 mar teorann ag $\frac{|x|}{x}$ nuair atá x ag druidim le 0 ón taobh dheis. Is féidir linn é seo a scríobh mar

$$\operatorname*{Tr}_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1.$$

Ní aontaíonn na teorainn ón dá thaobh, agus mar sin ní féidir linn

$$\operatorname*{Tr}_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$$

a luacháil : deirtear nach bhfuil an teorann seo ann.

Nóta: Más feidhm í f agus más ionann iad $\mathrm{Tr}_{x\to a^-} f(x)$ agus $\mathrm{Tr}_{x\to a^+} f(x)$ ag pointe éigin a, is féidir $\mathrm{Tr}_{x\to a} f(x)$ a shainmhíniú leis an luach céanna seo.

Sampla 1.3.9. *Sainnhínítear feidhm f leis an eolas thíos.*

$$f(x) := \begin{cases} x+3 & \text{má tá} \quad x \leqslant -3 \\ (x+3)^2 & \text{má tá} \quad -3 < x < 0 \\ 0 & \text{má tá} \quad x = 0 \\ 9 - x^2 & \text{má tá} \quad x > 0 \end{cases}$$

1. *Ríomhaigh na teorainn:*
   - *(a)* $\mathrm{Tr}_{x\to -3^-} f(x)$
   - *(b)* $\mathrm{Tr}_{x\to -3^+} f(x)$
   - *(c)* $\mathrm{Tr}_{x\to 0^-} f(x)$
   - *(d)* $\mathrm{Tr}_{x\to 0^+} f(x)$
2. - *(a) An bhfuil* $\mathrm{Tr}_{x\to -3} f(x)$ *ann?*
   - *(b) An bhfuil* $\mathrm{Tr}_{x\to 0} f(x)$ *ann?*
3. *An bhfuil f leanúnach*
   - *(a) ag $x = -3$?*
   - *(b) ag $x = 0$?*

Réitiú:

1. (a) $\text{Tr}_{x\to-3^-} f(x) = \text{Tr}_{x\to-3^-} x+3 = -3+3 = 0$
   (b) $\text{Tr}_{x\to-3^+} f(x) = \text{Tr}_{x\to-3^+}(x+3)^2 = (-3+3)^2 = 0^2 = 0$
   (c) $\text{Tr}_{x\to0^-} f(x) = \text{Tr}_{x\to0^-}(x+3)^2 = 3^2 = 9$
   (d) $\text{Tr}_{x\to0^+} f(x) = \text{Tr}_{x\to0^+} 9-x^2 = 9-0^2 = 9$

2. (a) Tá $\text{Tr}_{x\to-3} f(x)$ ann agus tá $\text{Tr}_{x\to-3} f(x) = 0$, mar tá 0 mar luach ag na teorainn ar an dá taobh, le $x \to -3$.
   (b) Tá $\text{Tr}_{x\to0} f(x)$ ann agus tá $\text{Tr}_{x\to-3} f(x) = 9$, mar tá 9 mar luach ag na teorainn ar an dá taobh, le $x \to -3$.
   Nóta: Tá 0 mar *luach* ag an bhfeidhm seo ag an bpointe $x = 0$, ach is cuma sin don fhadhb seo. Is é iompar na feidhme i *dtimpeallacht* $x = 0$ atá i gceist. É sin ráite, ní aontaíonn luach na feidhme seo ag $x = 0$ leis a teorann ag $x = 0$ - ciallaíonn sé seo go bhfuil *neamhleanúnachas* ag an bhfeidhm ag an bpointe $x = 0$.

3. (a) Tá f leanúnach ag $x = -3$, mar tá luach an teorann ag an bpointe sin (0) mar an gcéanna le luach na feidhme ag $x = -3$.
   (b) Níl f leanúnach ag $x = 0$, mar ní aontaíonn luach an teorainn ag an bpointe seo le luach na feidhme ag an bpointe seo. Tá "léim" nó "briseadh" nó "bearna" i graf na feidhme seo ag $x = 0$.

Sainmhíniú 1.3.10. *Más feidhm i* f *ar na réaduimhreacha agus más réaduimhir í* a, *deirtear go bhfuil* f leanúnach *ag an bpointe* a *má tá* $\text{Tr}_{x\to a} f(x)$ *ann, agus más ionann an teorann seo agus* $f(a)$, *luach na feidhme ag* a. *Ansin, tá* f *leanúnach ag* a *má tá*

$$\operatorname*{Tr}_{x\to a} f(x) = f(a).$$

An ábhar deireanach atá le phlé againn ins an mír seo na teorainn ag éigríoch.

Sampla 1.3.11. *Aimsigh an teorann*

$$\operatorname*{Tr}_{x\to\infty} \frac{x^2+3x+2}{x^3-2x}.$$

Baineann an sampla seo le iompar an ráiteas $\frac{x^2+3x+2}{x^3-2x}$ nuair atá x an-mhór agus deimhneach. B'fhéidir go bhfuil $\frac{x^2+3x+2}{x^3-2x}$ ag méadú gan stad nuair atá x ag méadú, nó b'fhéidir go bhfuil sé ag druidim le luach tairiseach, nó b'fhéidir go leanann sé ar aghaidh le luachanna éagsúla gan patrún ar bith, nó b'fhéidir go bhfuil iompar peiriadach nó ascalach ann. Ní féidir feidhm a luacháil ag éigríoch (∞) mar ní uimhir é éigríoch.

Réitiú do Sampla 1.3.11: Féach ar an cumhacht is airde de x atá in ainmneoir an chodáin : x^3 atá i gceist anseo. Is féidir linn an uimhreoir agus an ainmneoir a iolrú faoi $\frac{1}{x^3}$ (níl x gar do 0 mar táimíd ag smaoineamh ar $x \to \infty$). Ansin

$$\frac{x^2+3x+2}{x^3-2x} = \frac{\frac{1}{x^3}(x^2+3x+2)}{\frac{1}{x^3}(x^3-2x)} = \frac{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{1-\frac{2}{x^2}}.$$

Nuair atá x ag éirí an-mhór, tá $\frac{1}{x}$, $\frac{3}{x^2}$, $\frac{2}{x}^3$ agus $\frac{2}{x^2}$ ag druidim le 0. Ansin tá

$$\frac{\frac{1}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{1-\frac{2}{x^2}}$$

ag druidim le $\frac{0+0+0}{1-0} = 0$. Deirtear

$$\operatorname*{Tr}_{x\to\infty} \frac{x^2+3x+2}{x^3-2x} = 0.$$

Ciallaíonn an ráiteas seo go bhfuil an graf $y = \frac{x^2+3x+2}{x^3-2x}$ an-ghar don X-ais nuair atá x ag éirí mór, agus go leanann an graf seo ar agaidh ag druidim leis an X-ais nuair a leanann x ar aghaidh ag méadú. Deirtear go bhfuil an X-ais mar *asamtóit cothrománach* don ghraf.

Tá an sainmhíniú foirmiúil de teorann ag éigríoch thíos.

Sainmhíniú 1.3.12. *Más feidhm í* f *agus más uimhir í* a *le*

$$\operatorname*{Tr}_{x\to\infty} f(x) = a,$$

agus más uimhir an-bheag agus deimhneach í ε*, is féidir uimhir (mór)* M_ε *a roghnú sa gcaoi go mbeidh* $|f(x) - a|$ *níos lú ná* ε *má tá* $x > M_\varepsilon$*.*

Nóta: An brí a bhaineann le $|f(x) - a|$ ná luach uimhriúil an difríocht idir $f(x)$ agus a. Deireann an sainmhíniú thuas gur féidir linn socrú go mbeidh an difríocht sin chomh beag agus is mian linn, le x a roghnú mór go leor.

Sampla 1.3.13. *An bhfuil* $\operatorname{Tr}_{x\to-\infty} \cos x$ *ann?*

Freagra: Níl. Tá a fhios againn go bhfuil $\cos x$ periadach le periad 2π. Nuair atá x ag dul go ∞ no go $-\infty$, leanann luachanna na feidhme seo ar aghaidh ag athrú ar fud an eatraimh idir 1 agus -1. Dá bhrí sin, níl teorann ag $\cos x$ le $x \to \infty$ nó $x \to -\infty$.

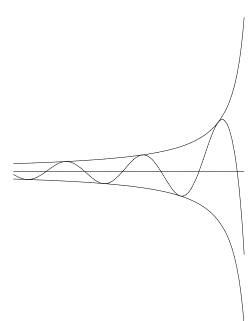
Sampla 1.3.14. *An bhfuil* $\operatorname{Tr}_{x\to-\infty} \frac{1}{x} \cos x$ *ann?*

Réitiú: Chun an cheist seo a fhreagairt, caithfimid smaoineamh ar na factóirí $\frac{1}{x}$ agus $\cos x$ ina aonair. Tá a fhios againn nach bhfuil teorann ag $\cos x$ le $x \to -\infty$, ach tá a fhios againn freisin go bhfuil luachanna $\cos x$ cuimsithe idir -1 agus 1.

Tá $\frac{1}{x}$ ag druidim le 0 agus $x \to -\infty$. I gcónaí, tá $\cos x$ idir -1 agus 1, agus ansin tá $\frac{1}{x} \cos x$ idir $-\frac{1}{x}$ agus $\frac{1}{x}$. Tá an graf $y = \frac{1}{x} \cos x$ cuimsithe ansin idir an graf $y = -\frac{1}{x}$ agus an graf $y = \frac{1}{x}$, agus dá bhrí sin tá $\frac{1}{x} \cos x$ ag druidim le 0 nuair atá $x \to -\infty$:

$$\operatorname*{Tr}_{x\to-\infty} \frac{1}{x} \cos x = 0.$$

Léiríonn an pictiúir thíos na graf $y = -\frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x}$ agus $y = \frac{1}{x} \cos x$, ar an eatramh ó $x = -10$ go $x = -1$.



Sampla 1.3.15. *Ríomhaigh an teorann*

$$\operatorname*{Tr}_{x\to-\infty} \sqrt{x+10} - \sqrt{x+1}.$$

Réitiú: Baineann an sampla seo le fréamhacha cearnacha agus sa chaoi sin tá sé cosúil le Sampla 1.3.7. Nuair atá x ag méadú ins an treo diúltach, tá $\sqrt{2x^2+1}$ agus $\sqrt{3x^2-1}$ ag méadú freisin (ins an treo deimhneach); níl sé soiléir céard atá á tharla leis an difríocht idir na feidhmeanna seo. Is féidir linn modh cosúil le Sampla 1.3.7 a úsáid; an foirmle iomlán a iolrú faoin chodán

$$\frac{\sqrt{x+10}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+10}+\sqrt{x+1}}.$$

Ansin

$$\begin{aligned}
\operatorname*{Tr}_{x\to-\infty} \sqrt{x+10}-\sqrt{x+1} &= \operatorname*{Tr}_{x\to-\infty} (\sqrt{x+10}-\sqrt{x+1})\left(\frac{\sqrt{x+10}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+10}+\sqrt{x+1}}\right) \\
&= \operatorname*{Tr}_{x\to-\infty} \frac{(x+10)-(x+1)}{\sqrt{x+10}+\sqrt{x+1}} \\
&= \operatorname*{Tr}_{x\to-\infty} \frac{9}{\sqrt{x+10}+\sqrt{x+1}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

1.4 Gnéithe eile de feidhmeanna

1.4.1 Comhshuíomh feidhmeanna agus feidhmeanna inbhéartacha

Más feidhmeanna iad f agus g, tugtar "f tar éis g" ar an fheidhm a shainmhínítear mar $x \to f(g(x))$, agus úsáidtear an nodaireacht $f \circ g$ chun í a chur in iúl.

Sampla 1.4.1. *Má tá* $f(x) = x^3 + 3$ *agus má tá* $g(x) = \cos x$, *ansin tá*

$$f \circ g(x) = f(\cos x) = \cos^3 x + 3, \text{ agus } g \circ f(x) = g(x^3 + 3) = \cos(x^3 + 3).$$

Nóta: Úsáidtear an nodaireacht $\sin^2 x$ agus $\cos^2 x$ chun $(\sin x)^2$ agus $(\cos x)^2$ a chur in iúl.

Chun $f \circ g$ a luacháil ag pointe áirithe x, caithfear $g(x)$ a luacháil ar dtús, agus ansin f a luacháil ag $g(x)$.

Sainmhíniú 1.4.2. *Más feidhmeanna iad* f *agus* g, *deirtear gur* feidhm inbhéarta *do* f *í* g *má tá* $g(f(x)) = x$ *do ghach* x. *Deirtear go bhfuil an fheidm* f in-inbhéartaithe *má tá* g *ann ionas go bhfuil* $g(f(x)) = x$ *do ghach* x.

Is féidir an sainmíniú thuas a thuiscint mar a leanas. Is feidhm í f a sheolann uimhreacha go huimhreacha eile, $x \to f(x)$. Más féidir feidhm g a shainmhíniú a sheolann gach $f(x)$ ar ais go x, glaotar inbhéarta f ar an g sin. Ar bhealach, malartaíonn g an obair atá déanta ag f ins an scéal seo.

Sampla 1.4.3. *Abair* $f(x) = x^2$.

Ansin cuimsíonn fearann f na réaduimhreacha go léir, ach níl na réaduimhreacha diúltacha in íomhá f. Tá $f(2) = 4$ agus tá $f(-2) = 4$ chomh maith. Más féidir linn feidhm inbhéarta g do f a shainmhíniú, caithfear $g(4) = 2$ a bheith againn agus $g(4) = -2$ freisin. Níl aon ciall anseo, mar ní féidir níos mó ná luach amháin a bheith ag g le $x = 4$. Ansin, níl an feidhm f in-inbhéartaithe ar $\mathbb{R}$.

An fadhb a bhaineann le f anseo ná go dtugann f an luach céanna do phointí difriúla ins an bhfearann, mar shampla 2 agus -2.

Sampla 1.4.4. *Abair* $f(x) = x^2$, *do* $x \geqslant 0$.

Ins an sampla seo tá an fheidhm f sainmhínithe do na hiumhreacha dearfacha amháin. Tá $f(2) = 4$ arís, agus níl aon pointe x eile i bhfearann f a shásaíonn $f(x) = 4$. Ins an chás seo, is féidir linn g a shainmhíniú ar na huimhreacha dearfacha (sin íomhá f) mar $g(x) = \sqrt{x}$.

Ansin tá $g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = x$, do ghach uimhir dearfach x. Is feidhm inbhéarta í g do f ar na réaduimhreacha dearfacha.

Sampla 1.4.5. *Abair* $f(x) = 3x + 2$, *go ghach* $x \in \mathbb{R}$.

Ins an sample seo tá na réaduimhreacha go léir i bhfearann f, agus má tá $f(x_1) = f(x_2)$, is ionann iad x_1 agus x_2.

Má tá $y = 3x + 2$, tá $x = \frac{1}{3}(y - 2)$. Ansin, is féidir "dul ar ais" ó y go x leis an bhfeidhm $y \to \frac{1}{3}(y - 2)$. Má thugaimid an t-ainm g don fheidhm seo, is féidir linn a fheiceáil gur feidhm inbhéarta do f í g :

$$g(f(x)) = g(3x + 2) = \frac{1}{3}(3x + 2 - 2) = \frac{1}{3}(3x) = x.$$

Sainmhíniú 1.4.6. *Deirtear go bhfuil feidhm* f aon le haon *má tá* $f(x_1) \neq f(x_2)$ *go gach* x_1 *agus* x_2 *i bhfearann* f.

Bíodh f ina feidhm aon-le-haon. Ansin, má tá uimhir éigin b i íomhá f, níl ach *luach amháin* de a a shásaíonn an cothromóid $f(a) = b$. Ansin is féidir linn feidhm g a shainmhíniú ar íomhá f, mar $g(f(a)) = a$, do gach a i fearann x. Is feidhm inbhéarta do f í g ansin, mar tá $f \circ g(x) = x$, do gach x i fearann f. Má tá feidhm f in-inbéartaithe, caithfear go bhfuil f aon-le-haon.

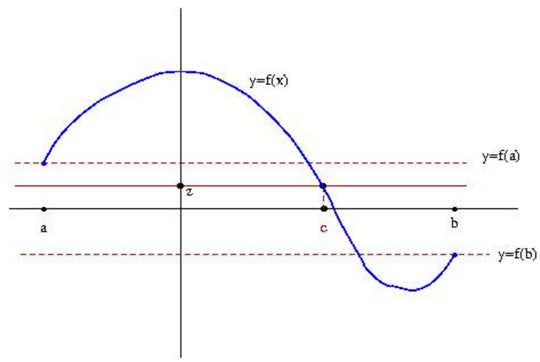
Is féidir a fheiceaáil ó graf f an bhfuil f aon-le-haon nó nach bhfuil. Má tá, trasnaíonn gach líne cothrománach an graf ag pointe amháin ar a mhéad.

1.4.2 An Teoirim Luach Idirmheánach

Is teoirim an-tábhachtach ins an Chalcalas é an Teoirim Luach Idirmheáach (TLI). Tá sé an-úsáideach mar shampla chun neas-réitigh do chothorómóidí a fháil, cé go bhfuil ráiteas an teoirim féin simplí go leor.

Baineann an teoirim le feidhm f atá leanúnach ar eatramh dúnta áirithe $[a, b]$. Cuimhnigh go gciallaíonn an leanúnachas seo nach bhfuil ach píosa amháin i graf f idir $x = a$ agus $x = b$. Go neamhfhoirmiúil, deireann an teoirim go trasnaíonn graf f gach líne cothrománach atá idir $y = f(a)$ agus $y = f(b)$. Tá an leagan foirmiúil thíos.

Teoirim 1.4.7. *Más feidhm í f atá leanúnach ar eatramh dúnta áirithe $[a, b]$, agus más uimhir é z atá idir $f(a)$ agus $f(b)$, tá uimhir c san eatramh $[a, b]$ a shásaíonn $f(c) = z$.*



Nóta: Ciallaíonn "idir $f(a)$ agus $f(b)$" go bhfuil $f(a) \leqslant z \leqslant f(b)$ nó $f(b) \leqslant z \leqslant f(a)$ - braitheann sé ar cé acu de $f(a)$ agus $f(b)$ atá níos mó.

Is féidir an Teoirim Luach Idirmheánach a úsáid chun neas-réitigh de cothromóidí a fháil, nó chun taispeáint go bhfuil réiteach ag cothromóid áirithe in eatramh áirithe, mar a léiríonn an sampla thuas.

Sampla 1.4.8. *Cruthaigh go bhfuil réiteach ag an gcothromóid $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ idir 1 agus 2.*

Réitiú: Tá a fhios againn go bhfuil an fheidhm f

$$x \to 4x^3 - 6x^2 + 3x - 2$$

leanúnach ar an eatramh $[1, 2]$, mar is feidhm iltéarmach í agus dá bhrí sin tá sí leanúnach. Is féidir linn an fheidhm seo a luacháil ag $x = 1$ agus ag $x = 2$.

$$\begin{aligned} f(1) &= 4(1)^3 - 6(1)^2 + 3(1) - 2 = -1 \\ f(2) &= 4(2)^3 - 6(2)^2 + 3(2) - 2 = 12 \end{aligned}$$

Idir $x = 1$ agus $x = 2$ ansin, athraíonn na luachanna de f ó diúltach go dearfach, agus dá bhrí sin tá 0 mar luach ag f ag pointe éigin idir 1 agus 2, dar leis an Teoirim Luach Idirmheánach. Ciallaíonn an ráiteas seo go bhfuil réiteach ag an gcothromóid $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ idir 1 agus 2.

Ceist 1.4.9. *Abair $f(x) = \frac{1}{x}$. Ansin tá $f(-1)$ diúltach agus tá $f(1)$ dearfach. An deireann an Teoirim Luach Idirmheánach ansin go bhfuil pointe c san eatramh $[-1, 1]$ le $f(c) = 0$?*

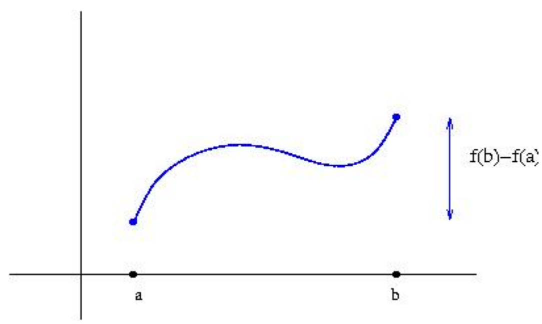
Freagra: Ní deireann, mar níl an fheidhm f leanúnach ar an eatramh $[-1, 1]$, go háirithe níl sí leanúnach ag $x = 0$. Ansin níl hipitéisí an TLI i bhfeidhm.

Chapter 2

Calcalas Difreálach

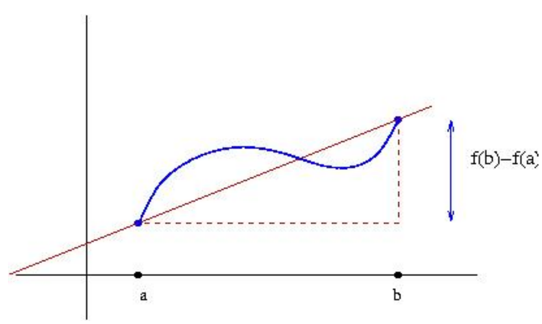
2.1 An Díorthach

Cuir i gcás gur feidhm í f. Más pointí iad a agus b i fearann f, is é $f(b) - f(a)$ an athrú i $f(x)$ agus x ag dul ó a go b.

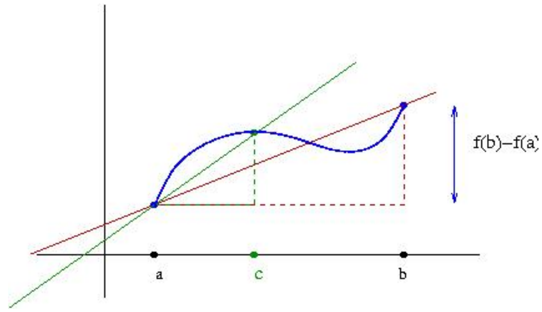


Is féidir líne a tharraingt trí na pointí $(a, f(a))$ agus $(b, f(b))$. Tugtar líne seiceant do f ar an líne seo. Is féidir fána an seiceant líne a scríobh i dtearmaí a, b agus f mar

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Tugtar an fána seo meastachán dúinn ar chomh tapaidh a bhfuil $f(x)$ ag athrú leis an athrú i x ó a go b. Más mian linn meastachán a dhéanamh ar chomh tapaidh a bhfuil $f(x)$ ag athrú ar eatramh níos lú ó a go c, is féidir linn féachaint ar fána an líne seiceant trí $(x, f(a))$ agus $(c, f(c))$. Tá líne mar seo léirithe thíos.



Is féidir fána an líne seiceant trí $(a, f(a))$ agus $(c, f(c))$ a scríobh mar

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

Tugann an uimhir seo meastachán dúinn faoi chomh tapaidh atá $f(x)$ ag athrú agus x ag dul ó a go b.

I gcalcalas difreálach tá suim againn i chomh tapaidh atá x ag athrú go díreach ag $x = a$. Tugtar *díorthach* f *ag* a do teorann an phróiséas thuas agus c ag druidim go a. Úsáidtear an nodaireacht $f'(a)$ chun aun uimhir seo a chur in iúl. Ansin

$$f'(a) = \operatorname*{Tr}_{c \to a} \frac{f(c) - f(a)}{c - a}.$$

Is é $f'(a)$ fána an *líne tadhlaí* don ghraf $y = f(x)$ ag an bpointe $(a, f(a))$.

Tá an leagan "oifigiúil" de sainmhíniú an díorthach thíos.

Sainmhíniú 2.1.1. *Más feidhm í* f*, deirtear go bhfuil* f *indifreálaithe ag an bpointe* a *má tá an teorann*

$$\operatorname*{Tr}_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

ann. Sa chás seo glaotar díorthach f ag $x = a$ *ar an dteorann seo, agus scríbhtear é mar* $f'(a)$.

Más feidhm í f, is feidhm í f' freisin, a shainmhínítear mar

$$f'(x) = \operatorname*{Tr}_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}.$$

Sampla 2.1.2. *Faigh* $f'(x)$ *má tá* $f(x) = x^2$.

Réitiú: Is féidir an sainmhíniú a úsáid :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \operatorname*{Tr}_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \\
&= \operatorname*{Tr}_{h \to 0} \frac{(x + h)^2 - x^2}{h} \\
&= \operatorname*{Tr}_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\
&= \operatorname*{Tr}_{h \to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\
&= \operatorname*{Tr}_{h \to 0} 2x + h \\
&= 2x.
\end{aligned}$$

Conclúid : $f'(x) = 2x$.

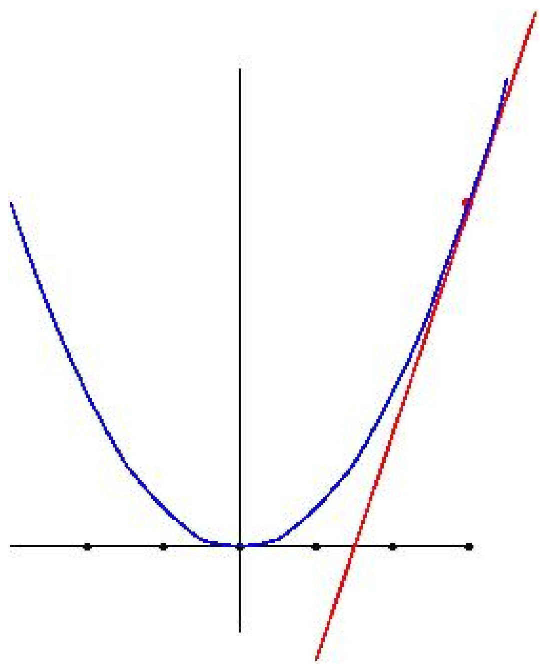
Ciallaíonn an conclúid thuas gur féidir linn fána an tadhlaí don ghraf $y = x^2$ a fháil ag pointe ar bith, agus cothromóid an tadhlaí sin a fháil chomh maith.

Sampla 2.1.3. *Faigh cothromóid an tadhlaí don ghraf* $y = x^2$ *ag an bpointe* $(3, 9)$.

Réitiú: Is féidir an *líne tadhlaí* ag an bpointe $(3, 9)$ a thuiscint mar seo: tá eolas iomlán againn faoin fheidhm $f(x) = x^2$ agus faoin ghraf $y = x^2$. Dá bhrí sin, is féidir linn cothromóid a ríomh le haghaidh an líne seiceant a chuimsíonn na pointí $(3, 9)$ agus $(4, 16)$, nó an ceann a chuimsíonn na pointí $(3, 9)$ agus $(3.5, (3.5)^2)$, nó an ceann a chuimsíonn na pointí $(3, 9)$ agus $(3.01, (3.01)^2)$, agus mar sin de. Is féidir cothromóid a fháil don líne seiceant a chuimsíonn an pointe $(3, 9)$ agus aon dara pointe ar bith atá ar an ngraf $y = x^2$. Is é an *líne tadhlaí* ag $(3, 9)$ teorann na línte seiceanta seo, agus an dara pointe ag driudim le $(3, 9)$. Ins an sampla seo agus de gnáth, ní thrasnaíonn an líne tadhlaí an graf ag $(3, 9)$, ach teagmhaíonn sé an graf ag an bpointe sin.

Más feidhm í f agus más pointe é x ionas go bhfuil $f'(x)$ sainmhínithe, is é $f'(x)$ fána líne tadhlaí an graf $y = f(x)$ ag an bpointe $(x, f(x))$. Go háirithe, ins an sampla seo, caithfear $f'(3)$ a fháil, le $f(x) = x^2$. Ó Sampla 2.1.2 tá a fhios againn go bhfuil $f'(x) = 2x$. Go háirithe ansin tá $f'(3) = 2(3) + 6$, sin fána an líne tadhlaí ag $x = 3$. Líne atá i gceist ansin a chuimsíonn an pointe $(3, 9)$ le fána 6; sásaíonn sé an cothromóid

$$y - 9 = 6(x - 3) \Longrightarrow y = 6x - 9.$$



Nodaireacht: Is féidir an nodaireacht $\frac{d}{dx}$ a úsáid chun díorthach maidir le x a chur in iúl. Mar shampla, is féidir

$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$$

a scríobh.

2.1.1 Díorthaigh de feidhmeanna triantánúla

Sampla 2.1.4. *Faigh* $\frac{d}{dx}(\sin x)$.

Réitiú: Caihfear

$$\operatorname*{Tr}_{h \to 0} \frac{\sin(x + h) - \sin x}{h}$$

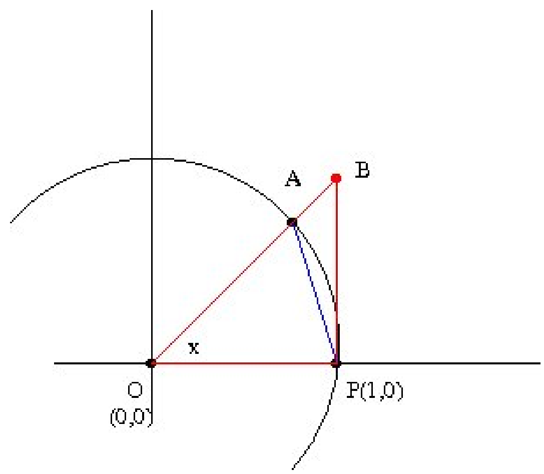
a ríomh. Tá a fhios againn go bhfuil

$$\sin(x + h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h.$$

Ansin
$$\operatorname*{Tr}_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\operatorname*{Tr}_{h\to 0}\frac{\sin x\cos h+\cos x\sin h-\sin x}{h}.$$
Le $h\to 0$, tá $\cos h\to 1$ agus ansin tá $\sin x\cos h-\sin x\to 0$. Is féidir an teorann thuas ansin a shimplí go
$$\operatorname*{Tr}_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\operatorname*{Tr}_{h\to 0}\frac{\cos x\sin h}{h}=\cos x\operatorname*{Tr}_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}.$$
Anois tá orainn $\mathrm{Tr}_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}$ a luacháil. De réir Teoirim 2.1.5 thíos, tá 1 mar luach ag an dteorann seo. Ansin
$$\boxed{\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x}$$

Teoirim 2.1.5. $\mathrm{Tr}_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Cruthú: Is féidir an learáid thíos a úsáid chun an teoirim a cruthú sa chás ina bhfuil x dearfach, $\sin x\to 0+$. Tá an cás diúltach cosúil le seo.



Is learáid é seo de píosa den aonadciorcal. Is é x an fhad ó A go P ar imlíne an chiorcail, agus is é x raidian an uilinn $\angle AOP$. Is iad $(\cos x,\sin x)$ comhordanáidí an phointe A. Is féidir a fheiceáil ón phictiúir bhfuil

Achar an triantáin OAP $\leqslant$ achar na teascóige OAP $\leqslant$ achar an triantáin OBP.

Is féidir na rudaí seo a scríobh í dtéarmaí x, $\sin x$ agus $\cos x$.
$$|\triangle AOP|=\frac{1}{2}(1)\sin x=\frac{1}{2}\sin x.$$
Cuimsíonn an stua ó P go A $\frac{x}{2\pi}$ de imlíne iomlán an aonadciorcail, agus dá bhrí sin cuimsíonn an teascóg AOP, $\frac{x}{2\pi}$ de achar iomlán an aonadciorcail. Ansin

Achar na teascóige AOP $=\frac{x}{2\pi}\times\pi(1)^2=\frac{x}{2}$.

Is triantán dronnuilleach é OBP agus dá bhrí sin tá
$$\tan x=\frac{|BP|}{|OP|}=\frac{|BP|}{1}\Longrightarrow|BP|=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}.$$
Ansin tá $|\triangle OBP|=\frac{1}{2}(1)\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)=\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}$. Anois
$$\frac{1}{2}\sin x\leqslant\frac{x}{2}\leqslant\frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x}\Longrightarrow\sin x\leqslant x\leqslant\frac{\sin x}{\cos x}.$$

Is féidir na neamhcothromóidí seo go léir a iolrú faoi $\frac{1}{\sin x}$ - uimhir dearfach é seo ins an chomhthéacs atá i gceist againn. Ansin faightear

$$1 \leqslant \frac{x}{\sin x} \leqslant \frac{1}{\cos x}.$$

Mar seo, tá $\frac{x}{\sin x}$ idir 1 agus $\frac{1}{\cos x}$. Nuair atá $x \to 0$ tá $\cos x \to 1$ agus tá $\frac{1}{\cos x}$ ag druidim go 1 chomh maith. Ansin tá $\frac{x}{\sin x}$ teoranta idir dhá rud atá ag druidim go 1 nuair atá x ag druidim go 0, agus tá

$$\operatorname*{Tr}_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ agus } \operatorname*{Tr}_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$

mar chonclúid againn. □

Nóta: Is féidir a léiriú chomh maith go bhfuil

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x.$$

2.1.2 Rialacha ghinearálta a bhaineann leis an díorthach

1. Más feidhm tairiseach é f, mar shampla $f(x) = 2$, tá $f'(x) = 0$.
2. $\frac{d}{dx}(x) = 1$.
3. Más réaduimhir é n le $n \neq 0$, tá
$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}.$$
Mar shampla, tá $\frac{d}{dx}(x^4) = 4x^3$ agus tá $\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$.
4. $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$ agus $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$.
5. Go ghinearálta, $\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) + \frac{d}{dx}(g(x)) = f'(x) + g'(x)$, más feidhmeanna iad f agus g.
Mar shampla,
$$\frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{3}} + x^2) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 2x.$$
6. Más réaduimhir é a agus más feidhm í f, tá
$$\frac{d}{dx}(af(x)) = a\frac{d}{dx}(f(x)) = af'(x).$$
Mar shampla, $\frac{d}{dx}(4x^5) = 4\frac{d}{dx}(x^5) = 4(5x^4) = 20x^4$.

Sampla 2.1.6. *Faigh* $\frac{d}{dx}(3\sin x + 4x^3 + \sqrt{x})$.

Réitiú:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(3\sin x + 4x^3 + \sqrt{x}) &= 3\frac{d}{dx}(\sin x) + 4\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}}) \\ &= 3\cos x + 4(3x^2) + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} \\ &= 3\cos x + 12x^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

2.2 Rialacha Difreála

2.2.1 Riail an toraidh

Teoirim 2.2.1 (Riail an toraidh)**.** *Más feidhm í* f *a shásaíonn cothromóid den fhoirm*

$$f(x) = u(x)v(x),$$

do feidhmeanna u *agus* v*, tá*

$$f'(x) = u(x)v'(x) + u'(x)v(x).$$

Nóta: Is féidir riail an toraidh a scríobh mar

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx}v.$$

Sampla 2.2.2. *Faigh* $f'(x)$ *má tá* $f(x) = x^2 \cos x$*.*

Réitiú: Is féidir linn riail an toraidh a úsáid anseo, mar is iolrach de dhá fheidhm atá i gceist. Is féidir $u(x) = x^2$ agus $v(x) = \cos x$ a scríobh. Ansin tá

$$u'(x) = 2x, \ \ v'(x) = -\sin x,$$

agus tá

$$f'(x) = u(x)v'(x) + u'(x)v(x) = x^2(-\sin x) + 2x\cos x = -x^2 \sin x + 2x \cos x.$$

Sampla 2.2.3. *Faigh* $\dfrac{d}{dx}(sin^2 x)$*.*

Réitiú: Is féidir $\sin^2 x$ a scríobh mar $(\sin x) \times (\sin x)$. Ansin is féidir riail an toraidh a chur i bhfeidhm le $u = \sin x$ agus $v = \sin x$, agus le $u' = \cos x$ agus $v' = \cos x$. Ansin

$$\frac{d}{dx}(uv) = uv' + u'v = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x.$$

2.2.2 An Chuingriail

Teoirim 2.2.4 (An Chuingriail)**.** *Más feidhm í* f *a shásaíonn cothromóid den fhoirm*

$$f(x) = u(v(x)),$$

do feidhmeanna áirithe u *agus* v*, is féidir* $f'(x)$ *a scríobh mar*

$$f'(x) = u'(v(x))v'(x).$$

Nóta: Ciallaíonn an ráiteas $f(x) = u(v(x))$ go bhfuil $f = u \circ v$ nó gur chomhshuíomh é f de u agus v.

Sampla 2.2.5. *Má tá* $f(x) = \sin(x^2)$*, faigh* $f'(x)$*.*

Réitiú: Is féidir an cuingriail a úsáid anseo mar is chomhshuíomh é f den fheidhm sin agus den fheidhm $x \to x^2$. Ar dtús, is ionann $f(x)$ agus $\sin(v)$, (le $v = x^2$). De réir an chuingriail ansin, caithfear f a difreáil maidir le v ar dtús, agus faightear $\cos v$ ansin. Caithfear é seo a iolrú faoi díorthach x^2 maidir le x ansin. Faightear

$$\frac{d}{dx}(\sin x^2) = \cos x^2 \frac{d}{dx}(x^2) = (\cos x^2) \times (2x) = 2x \cos x^2.$$

Sampla 2.2.6. *Faigh* $f'(x)$ *má tá* $f(x) = (3x + \sin x)^3$.

Réitiú:

$$f'(x) = 3(3x + \sin x)^2 \times \frac{d}{dx}(3x + \sin x) == 3(3x + \sin x)^2(3 + \cos x).$$

Sampla 2.2.7. *Faigh* $f'(x)$ *má tá* $f(x) = \dfrac{1}{\sin x + \cos x}$.

Réitiú: Is féidir $f(x)$ a scríobh mar

$$f(x) = (\sin x + \cos x)^{-1}.$$

Ansin is féidir an cuingriail a úsáid chun $f'(x)$ a fháil mar a leanas :

$$f'(x) = -1(\sin x+\cos x)^{-2} \times \frac{d}{dx}(\sin x+\cos x) = -1(\sin x+\cos x)^{-2}(\cos x-\sin x) = \frac{\sin x - \cos x}{(\sin x + \cos x)^2}.$$

Sampla 2.2.8. *Faigh* $f'(x)$ *má tá* $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^2 + 1}$.

Réitiú: Is féidir riail an toraidh agus an cuingriail a úsáid le chéile chun an cheist seo a fhreagairt. Ar dtús, is féidir $f(x)$ a scríobh mar iolrach :

$$f(x) = (\sin x) \times \frac{1}{x^2 + 1} = (\sin x) \times ((x^2 + 1)^{-1}).$$

Anois abair $u(x) = \sin x$ agus $v(x) = (x^2 + 1)^{-1}$. Ansin

$$\begin{aligned} u'(x) &= \cos x, \\ v'(x) &= -1(x^2 + 1)^{-2} \frac{d}{dx}(x^2 + 1) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

De réir riail an toraidh ansin tá

$$\begin{aligned} f'(x) &= u(x)v'(x) + u'(x)v(x) \\ &= \sin x \left(-\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}\right) + \cos x \frac{1}{x^2 + 1} \\ &= \frac{-2x \sin x + \cos x(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2}. \end{aligned}$$

Léiríonn Sampla 2.2.8 thuas gur féidir an tríú “riail coitianta” de chalcalas difreálach, sin riail an lín, a fháil ó riail an toraidh agus ón chuingriail. Baineann riail an lín le feidhmeanna atá scríofa mar chodáin.

Teoirim 2.2.9 (Riail an lín)**.** *Má tá* $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ *do feidhmeanna áirithe* u *agus* v, *tá*

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}.$$

Is féidir riail an lín a úsáid chun an díorthach i Sampla 2.2.8 a fháil. Feictear go bhfuil an freagra mar an gcéanna leis an modh a úsáidtear thuas.

2.3 Optamú

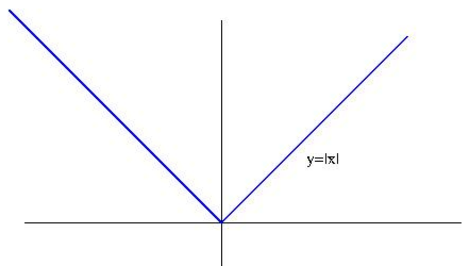
Tá feidhm f *indifreálaithe* ag an bpointe a má tá an teorann

$$\operatorname*{Tr}_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(x)}{h}$$

ann, nó más féidir líne tadhlaí don ghraf $y = f(x)$ a tharraingt ag an bpointe $(a, f(a))$. Go neamhfhoirmiúil ciallaíonn an ráiteas seo go bhfuil an feidhm f leanúnach ag an bpointe a, agus nach bhfuil cúinne nó uillinn ins an ghraf $y = f(x)$ ag an bpointe $(a, f(a)$.

Sampla 2.3.1. *Cruthaigh nach bhfuil an feidhm $f(x) = |x|$ indifreálaithe ag $x = 0$.*

Cruthú: Ón phictiúir is féidir linn a fheiceáil go bhfuil "cúinne" ins an ghraf $y = |x|$ ag $x = 0$, agus dá bhrí sin nach bhfuil feidhm an luach uimhriúil indifreálaithe ag $x = 0$. Ní féidir líne tadhlaí amháin a shainmhíniú don ghraf thíos ag $x = 0$.



Chun an rud céanna fheiceáil ar bhealach níos fhoirmiúla, féach ar sainmhíniú an díorthaigh mar teorann. Tá orainn féachaint ar

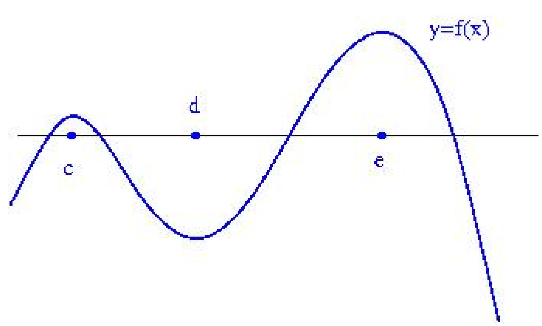
$$\operatorname*{Tr}_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \operatorname*{Tr}_{h\to 0} \frac{f(h)}{h}.$$

Nuair atá $h \to 0^-$, is ionann $f(h)$ agus $-h$, agus tá $\frac{f(h)}{h} = -1$.
Nuair atá $h \to 0^+$, is ionann $f(h)$ agus h, agus tá $\frac{f(h)}{h} = 1$.
Ansin, tá $\mathrm{Tr}_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h} = -1$, agus tá $\mathrm{Tr}_{h\to 0+} \frac{f(h)}{h} = 1$. Níl aontas idir na teorainn ón dhá thaobh, agus dá bhrí sin níl díorthach ag an bhfeidhm f ag an bpointe $x = 0$. Níl f *indifreálaithe* ag an bpointe seo.

Má tá feidhm éigin indifreálaithe, is féidir calcalas difreálach a úsaid chun na luachanna is airde agus is ísle den fheidhm a fháil, ar eatramh áirithe nó ar fud an uimhirlíne. Tugtar *optamú* ar an phróiseas seo.

Sainmhíniú 2.3.2. *Más feidhm í f, deirtear go bhfuil* uasluach logánta *ag f ag an bpointe c má tá $f(c) \geqslant f(x)$ do ghach x in eatramh oscailte a chuimsíonn c.*
Deirtear go bhfuil dearbh-uasluach ag f ag an bpointe c má tá $f(c) \geqslant f(x)$ do ghach x i bhfearann f.

Ins an chás seo tá graf f i dtimpeallacht c cosúil leis an bpictiúir thíos. Tá seans an go bhfuil pointe éigin d (i bhfad ó c), le $f(d) > f(c)$, ach is féidir eatramh a tharraignt i dtimpeallacht x ionas go bhfuil $f(c)$ mar uasluach ag x ins an eatramh seo. Ins an phictiúir thíos, tá uasluachanna logánta ag f ag na pointí c agus e.



Sainmhíniú 2.3.3. *Más feidhm í* f, *deirtear go bhfuil* íosluach logánta *ag* f *ag an bpointe* d *má tá* $f(d) \leqslant f(x)$ *do ghach* x *in eatramh oscailte a chuimsíonn* d.
Deirtear go bhfuil dearbh-íosluach ag f *ag an bpointe* d *má tá* $f(d) \leqslant f(x)$ *do ghach* x *i bhfearann* f.

Ins an phictiúir thuas, tá íosluach logánta ag f ag an bpointe d.

Sainmhíniú 2.3.4. *Más feidhm í* f *atá sainmhínithe ar eatramh dúnta éigin* $[a, b]$, *deirtear go bhfuil* f ag méadú *ar* $[a, b]$ *má tá* $f(x_1) < f(x_2)$ *go ghach* x_1 *agus* x_2 *in* $[a, b]$ *le* $x_1 < x_2$.
Deirtear go bhfuil f ag laghdú *ar* $[a, b]$ *má tá* $f(x_1) > f(x_2)$ *go ghach* x_1 *agus* x_2 *in* $[a, b]$ *le* $x_1 < x_2$.

Ins an phictiúir thuas, tá f ag laghdú ar $[c, d]$, agus ag méadú ar $[d, e]$.

An nasc le calcalas difreálach

Má tá f indifreálaithe, id féidir na sainmhínithe thuas a thuiscint i dtéarmaí an díorthach.

1. Má tá f ag méadú ar an eatramh $[a, b]$ agus má tá f indifreálaithe ar an eatramh (a, b), tá fána deimhneach ag an líne tadhlaí don ghraf $y = f(x)$ ag gach $x \in (a, b)$, agus dá bhrí sin tá $f'(x) > 0$ do ghach $x \in (a, b)$.
2. Má tá f ag laghdú ar an eatramh $[a, b]$ agus má tá f indifreálaithe ar an eatramh (a, b), tá fána diúltach ag an líne tadhlaí don ghraf $y = f(x)$ ag gach $x \in (a, b)$, agus dá bhrí sin tá $f'(x) < 0$ do ghach $x \in (a, b)$.
3. Má tá uasluach no íosluach logánta ag f ag an bpointe a agus má tá f indifreálaithe ag a, tá an líne tadhlaí don ghraf $y = f(x)$ ag $(a, f(a))$ cothrománach, tá 0 mar fána ann, agus dá bhrí sin tá $f'(a) = 0$.

Nóta: Má tá $f'(a) = 0$ do phointe éigin a, níl sé cinnte go bhfuil íosluach nó uasluach logánta ag an bhfeidhm f ag an bpointe a. Mar shampla, má tá $f(x) = x^3$, tá $f'(x) = 3x^2$ agus tá $f'(0) = 0$. Cé go bhfuil $f'(0) = 0$, tá an fheidhm f ag méadú ar fud an uimhirlíne.

Tá $3x^2$ deimhneach do ghach x ach amháin 0; dá bhrí sin tá fána an líne tadhlaí don ghraf ag gach pointe ach amháin $(0, 0)$ deimhneach. Tá an líne tadhlaí ag an bpointe $(0, 0)$ féin cothrománach. Ach tá fána deimhneach ag na línte tadhlaí eile go léir den ghraf $y = x^3$, ar an dhá thaobh de 0.

Sainmhíniú 2.3.5. *Más pointe é* c *atá i fearann na feidhme* f, *is* pointe criticiúla *é* c *do* f *má tá* $f'(c) = 0$, *nó mura bhfuil* f *indifreálaithe ag* c.

Má tá uasluach nó íosluach logánta ag f ag pointe éigin c, is pointe criticiúla do f é c.

Sampla 2.3.6. *Bíodh* $f(x) = x^3 + x^2 - 8x + 5$. *Faigh na pointí criticiúla go léir de* f, *agus do ghach ceann acu, réitigh an uasluach logánta, íosluach logánta nó rud eile atá i gceist.*

Réitiú:

Céim 1 : Tá an fheidhm f leanúnach agus indifreálaithe ar fud an uimhirlíne. Is féidir linn $f'(x)$ a scríobh :

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 8, \text{ do ghach } x \in \mathbb{R}.$$

Céim 2 : Is iad na pointí criticiúla de f réitigh an cothromóid $f'(x) = 0$. Ansin

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Longrightarrow 3x^2 + 2x - 8 &= 0 \\ \Longrightarrow 3x^2 + 2x - 8 &= 0 \\ \Longrightarrow (3x - 4)(x + 2) &= 0 \\ \Longrightarrow x = \frac{4}{3} \quad &\text{nó } x = -2 \end{aligned}$$

Is iad $\frac{4}{3}$ agus -2 na pointí criticiúla de f.

Céim 3 : Chun na pointí criticiúla a aimsiú ní leor féachaint ar luach f' ag an bpointe criticiúla, caithfear féachaint ar luachanna f' i dtimpeallacht an phointe sin freisin. Ins an chás seo tá $f'(x) = (3x-4)(x+2)$ agus tá $f'(x) = 0$ ag $x = \frac{4}{3}$ agus $f = -2$.

- Nuair atá $x < -2$, tá an dá factóir $3x-4$ agus $x+2$ diúltach, ansin tá $f'(x)$ deimhneach agus tá f ag méadú.
- Nuair atá $-2 < x < \frac{4}{3}$, tá $3x-4$ diúltach agus sa $x+2$ deimhneach. Ansin tá $f'(x)$ deimhneach agus tá f ag laghdú.
- Nuair atá $x > \frac{4}{3}$, tá an dá factóir $3x-4$ agus $x+2$ deimhneach, ansin tá $f'(x)$ deimhneach agus tá f ag méadú.

Ansin, tá f ag méadú ar an taobh chlé den chéad pointe criticiúl $x = -2$ agus ag laghdú ar an taoibh dheis de : is *uasluach logánta* atá i gceist ag $x = -2$.

Tá f ag laghdú ar an taobh chlé den dara pointe criticiúl $x = \frac{4}{3}$ agus ag méadú ar an taoibh dheis de : is *íosluach logánta* atá i gceist ag $x = \frac{4}{3}$.

Tugann an píosa deireanach den sampla thuas eolas tábhachtach dúinn ar conas is féidir a aimsiú an uasluach, íosluach nó rud eile atá igceist le pointe criticiúil. Bíodh f ina feidhm indifreálaithe le pointe criticiúil ag c. Ansin tá $f'(c) = 0$. Más uasluach logánta atá i gceist ag c, tá f ag méadú ar an taobh chlé de c agus ag laghdú ar an taobh dheis de c. Ansin tá fána an líne tadhlaí deimhneach ar an taobh chlé de c agus diúltach ar taobh dheis de; tá 0 mar luach ag an fána seo ag an bpointe c féin. Mar sin, tá $f'(x)$ ag laghdú ó deimhneach go diúltach nuair atá x ag méadú trí c, agus dá bhrí sin tá díorthach f' diúltach ag $x = c$.

Sainmhíniú 2.3.7. *Más feidhm indifreálaithe í* f*, glaotar an* dara díorthach *de* f *ar an bhfeidhm* $\frac{d}{dx}(f'(x))$. *Is féidir é a scríobh mar* $f''(x)$.

Má tá pointe criticiúil ag f ag $x = c$, tá $f'(c) = 0$. Má tá $f''(c) < 0$ chomh maith, ciallaíonn sé go bhfuil f' ag laghdú ó deimhneach go diúltach ag c, agus ansin gur uasluach logánta atá i gceist ag c. Má tá $f''(c) > 0$, cíallaíonn sé go bhfuil f'ag méadú ó diúltach go deimhneach ag c, ansin is íosluach logánta atá i gceist ag c.

Is féidir an reasúnaíocht seo a chur i bhfeidhm chun nádúr na phointí criticiúla i Sampla 2.3.6 a aimsiú. In an sampla seo, tá

$$f(x) = x^3 + x^2 - 8x + 5, \quad f'(x) = 3x^2 + 2x - 8, \quad f''(x) = 6x + 2.$$

Tá na pointí criticiúla ag $x = -2$ agus $x = \frac{4}{3}$. Is féidir linn f'' a luacháil ag na bpointí seo :

$$f''(-2) = 6(-2) + 2 < 0, \quad f''\left(\frac{4}{3}\right) = 6 \times \frac{4}{3} + 2 > 0.$$

Ansin, tá uasluach logánta ag f ag $x = -2$, agus tá íosluach logánta ag f ag $x = \frac{4}{3}$.

Nóta: Más mian linn, is féidir linn na luachanna de f a bhaineann leis na pointí criticiúla a fháil; ins an sampla seo, tá

$$f(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 - 8(-2) + 5 = 17 \text{ agus } f\left(\frac{4}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 - 8\left(\frac{4}{3}\right) + 5 = -\frac{41}{27}.$$

Sampla 2.3.8. *Bíodh* $f(x) = (x^2-1)\sqrt{x}$. *Faigh na pointí criticiúla go léir de* f*, agus aimsigh do gach ceann acu an uasluach nó íosluach atá i gceist, nó ceachtar acu.*

Réitiú: Tabhair faoi deara sa chéad áit gut iad na réaduimhreacha dearfacha amháin agus 0 atá i bhfearann f. (Tugtar *fearann nádúrtha* f ar an tacar $[0, \infty)$). Caithfear $f'(x)$ a fháil agus an cothromóid $f'(x) = 0$ a réitiú.

$$f(x) = x^{\frac{5}{2}} - x^{\frac{1}{2}} \Longrightarrow f'(x) = \frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{5x^2 - 1}{2\sqrt{x}}.$$

Má tá $f'(x) = 0$, tá $5x^2 - 1 = 0$, ansin tá $x^2 = \frac{1}{5}$. Tá dhá féidireachtaí ann, $x = \sqrt{1/5}$ agus $x = -\sqrt{1/5}$. Níl orainn bacadh leis an dara ceann, áfach, mar níl sé i bhfearann f. Tá pointe criticiúl amháin ag f, ag $x = \sqrt{1/5}$.

Tá $f'(x) = \dfrac{5x^2 - 1}{2\sqrt{x}}$. Tá an ainmneoir anseo, $2\sqrt{x}$, dearfach i dtimpeallacht $\sqrt{1/5}$. Tá an uimhreoir, $5x^2 - 1$, dearfach nuair atá $x > \sqrt{1/5}$, agus diúltach nuair atá $x < \sqrt{1/5}$. Ansin tá fána an líne tadhlaí de $y = f(x)$ diúltach ar an taobh chlé de $x = \sqrt{1/5}$ agus dearfach ar an taoibh dheis de. Mar sin, is íosluach logánta atá i gceist anseo.

Sampla 2.3.9. *Cruthaigh go bhfui réiteach amháin ag an gcothromóid*

$$x^5 - 2x^2 - 3 = 0$$

ins an eatramh $[1, 5]$.

Réitiú: Tá dhá rud le déanamh againn anseo. Tá orainn taispeáint go bhfuil réiteach ins an eatramh $[1, 5]$ agus nach bhfuil níos mó ná réiteach amháin ann.

Ar dtús abair $f(x) = x^5 - 2x^2 + 1$ agus féach ar na luachanna de f ag $x = 1$ agus $x = 5$. Tá

$$f(1) = 1^5 - 2(1)^2 - 3 < 0 \text{ agus tá } f(5) = 5^5 - 2(5)^2 - 3 > 0.$$

Tá f leanúnach ar $[1, 5]$, ansin trasnaíonn graf f an X-ais idir $x = 1$ agus $x = 5$, de réir an Teoirim Luach Idirmheánach. Mar sin, tá $c \in [1, 5]$ le $f(c) = 0$, agus is réiteach é c don chothromóid $x^5 - 2x^2 - 3 = 0$.

Chun cruthú nach bhfuil níos mó ná réiteach amháin ins an eatramh, is féidir linn féachaint ar f'. Tá

$$f'(x) = 5x^4 - 4x = x(5x^3 - 4).$$

Nuair atá $1 \leqslant x \leqslant 5$, tá x deimhneach agus tá $5x^3 - 4$ deimnhneach chomh maith. Ansin tá f ag méadu ar an eatramh $[1, 5]$ go léir, agus ní féidir le graf f an X-ais a thrasnú níos mó ná uair amháin ar an eatramh seo.

Teoirim 2.3.10. *Má tá* f *leanúnach ar eatramh dúnta* $[a, b]$, *tá dearbh-uasluach agus dearbh-íosluach ag* f *ar an eatramh* $[a, b]$. *Ciallaíonn an ráiteas seo go bhfuil pointí* c *agus* d *in* $[a, b]$ *le* $f(c) = m$, $f(d) = M$, *agus* $m \leqslant f(x) \leqslant M$ *do ghach* $x \in [a, b]$.

Sampla 2.3.11. *Bíodh* $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x - 20$. *Faigh na luachanna is airde agus is ísle de* f *ar an eatramh* $[0, 5]$, *agus na pointí ag a shroichtear iad.*

Réitiú: Tá dhá féidearachtaí ann. Tá seans ann go bhfuil an dearbh-uasluach nó dearbh-íosluach ag pointí criticiúla taobh istigh den eatramh, agus tá seans ann freisin go bhfuil ceann amháin acu nó an dá ceann ag críochphointe den eatramh. Caithfimid na pointí criticiúla taobh isitgh den eatramh a fháil agus an fheidhm f a luacháil ag na pointí seo agus ag na críochphointí.

Tá $f'(x) = 3x^2 + 6x - 24$.

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow 3x^2 + 6x - 24 = 0 \Longrightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Longrightarrow (x - 2)(x + 4) = 0.$$

Ansin tá pointí criticiúla ag f ag $x = 2$ agus $x = -4$; níl ach ceann amháin de na pointí seo taobh istigh den ár eatramh, sin $x = 2$. Anois is féidir linn f a luacháil ag an bpointe seo agus ag na críochphointí $x = 0$ agus $x = 5$.

- $f(0) = 0^3 + 3(0)^2 - 24(0) - 20 = -20$
- $f(2) = 2^3 + 3(2)^2 - 24(2) - 20 = -48$
- $f(5) = 5^3 + 3(5)^2 - 24(5) - 20 = 60$

Ansin, tá 60 mar dearbh-uasluach ag f ar $[0,5]$, le $f(5) = 60$, agus tá -48 mar dearbh-íosluach ag f ar $[0,5]$, le $f(2) = -48$.

Is féidir modhanna ó chalcalas difreálach a úsáid chun fadhbanna optamáchána ón "gnáth shaol" a réitiú chomh maith, mar a léiríonn an sampla thíos.

Sampla 2.3.12. *Tá sorcóir de toirt 1000cm^3 á dhéanamh as leathán miotail. Cén achar de miotail ar a laghad atá de dhíth?*

Réitiú: Bíodh r mar ga ag an tsorcóir agus h mar ard ann. Ansin tá $V = \pi r^2 h$ mar toirt ann agus tá

$$2\pi r \times h + 2 \times \pi r^2$$

mar achar dromchla ann. Táimid ag iarraidh an achar A a íoslaghdú agus is feidhm é de r agus de h.

Tá a fhios againn go bhfuil $V = 1000$, agus is féidir ann eolas sin a úsáid chun h a scríobh í dtéarmaí r agus ansin chun A a scríobh í dtéarmaí r amháin, agus calcalas a úsáid chun íosluach an achar a fháil.

$$V = \pi r^2 h = 1000 \Longrightarrow h = \frac{1000}{\pi r^2}.$$

Ansin

$$A = 2\pi r \times h + 2 \times \pi r^2 = 2\pi r \times \frac{1000}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2000}{r} + 2\pi r^2.$$

Chun A a íoslaghdú caithfimid féachaint ar an díorthach $\frac{dA}{dr}$:

$$\frac{dA}{dr} = -2000r^{-2} + 4\pi r.$$

Chun pointí criticiúla a aimsiú, réitigh an cothromóid $\frac{dA}{dr} = 0$:

$$-2000r^{-2} + 4\pi r = 0 \Longrightarrow -2000 + 4\pi r^3 = 0 \Longrightarrow r^3 = \frac{500}{\pi} \Longrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}.$$

Tá pointe criticiúil amháin ag A, ag $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$cm. Is é $4000r^{-3} + 4\pi$ an dara díorthach de A, agus tá sé deimhneach do gach luach deimhneach de r. Ansin is íosluach atá i gceist ag $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$. Is féidir linn an luach seo a chur in áit r i sainmhíiú A chun an achar dromchla is lú agus is féidir a bheith ag sorcóir de toirt V a fháil :

$$A_{min} = \left(2000\sqrt[3]{\frac{\pi}{500}} + 2\pi\left(\frac{500}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}\right) \text{cm}^2.$$

Glossary

f tar éis g f after g, page 17

éagóimheasta irrational, page 2

Éaguimsithe Unbounded, page 4

éigríoch infinity, page 14

íomhá image, page 6

íoslaghdú minimize, page 30

íosluach minimum value, page 26

íosluach logánta local minimum, page 26

achar area, page 22

achar dromchla surface area, page 30

ainmneoir denominator, page 11

ais axis, page 2

ais axis, page 6

aon le haon one-to-one, page 17

aonadciorcal unit circle, page 8

Aontas Union, page 5

asamtóit cothrománach horizontal asymptote, page 15

ascalach oscillating, page 14

Ball Element, page 4

Barrtheilgeach surjective, page 4

cóimheasta rational, page 2

cónasctha connected, page 2

ceartingearach vertical, page 2

ceartingearach vertical, page 6

comhordanáid coordinate, page 6

comhshíneas cosine, page 8

Chapter 3

Feidhmeanna easpónantúla agus logartamacha

3.1 An fheidhm easpónantúil agus an logartam nádúrtha

Sampla 3.1.1. *[Ús iolraithe] Cuirtear príomshuim de €100 sa bhanc, agus íoctar ús air go leanúnach ag ráta 4% sa bhliain. Glaotar* $P(x)$ *ar an iarmhéid tar éis* x *bliain.*

Tar éis bliain amháin, tá $100 \times (1.04)$ *ins an chuntas.*
I rith an dara bliain, íoctar ús ar an suim seo agus tar éis an dara bliain tá

$$100 \times (1.04) \times (1.04) = 100 \times (1.04)^2$$

ins an chuntas.
Tar éis an triú bliain, tá

$$100 \times (1.04)^2 \times 1.04 = 100 \times (1.04)^3$$

ann, agus mar sin de. Ansin, tá

$$P(x) = 100 \times (1.04)^x.$$

Cuimhnigh gur é 100 an príomhshuim ar dtús.

Is sample é Sampla 3.1.1 de *fás easpóantúil*. Tá an iarmhéid ins an chuntas ag fás an t-am ar fad, ag ráta atá comhréireach leis a luach láithreach. Feictear fás (agus meath) den saghas seo go minic ins an mhata feidhmeach. Mar shampla, ins an bitheolaíocht, feictear fás easpónantúil go minic i daonra de ainmhithe no planda'i nó baictéir. Ins an fisic, feictear meath easpóneantúil in ábhair radaigníomhach.

Sainmhíniú 3.1.2. *Glaotar "an fheidhm easpónantúil le bonn* a*" ar an bhfeidhm* f *atá sainmhínithe mar*

$$f(x) = a^x$$

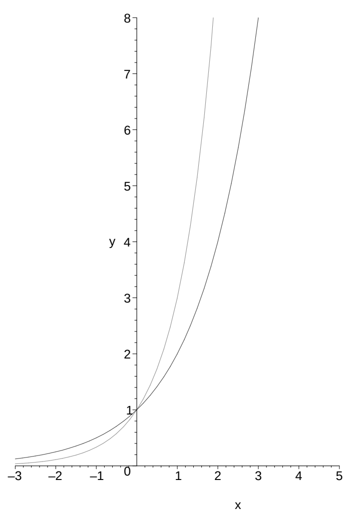
do uimhir deimhneach $a \neq 1$.

Úsáidtear an tearma "éaspónantúil" mar tá an spleáchas ar an athróg x ins an easpónant.

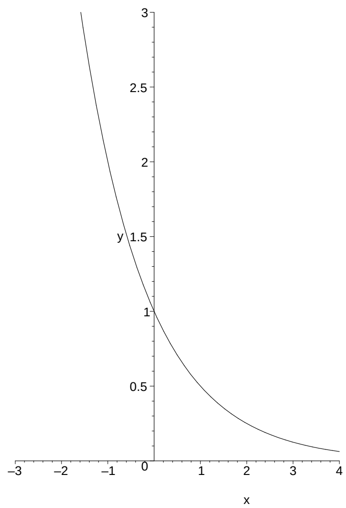
Abair $f(x) = a^x$. Ansin

$$\begin{aligned} f'(x) &= \operatorname*{Tr}_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \operatorname*{Tr}_{h\to 0} \frac{a^{x+h}-a^x}{h} \\ &= \operatorname*{Tr}_{h\to 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} \\ &= \operatorname*{Tr}_{h\to 0} \frac{a^x(a^h-1)}{h} \\ &= a^x \operatorname*{Tr}_{h\to 0} \frac{(a^h-1)}{h} \\ &= a^x f'(0). \end{aligned}$$

Ansin, tá $f(x)$ agus a díorthach go h-an cosúil le chéile, níl aon difríocht eatarthu ach an factóir $f'(0)$. Is uimhir é an factóir seo, agus níl ann ach fána an líne tadhla'i don ghraf $y = a^x$ ag an bpointe $(0,1)$. Braitheann luach an uimhir seo ar an uimhir a. Tá sé níos airde nuair atá a níos airde, agus a^x ag méadú níos tapaidh. Léiríonn an pictiúir thíos an cruth ghinireálta atá ar graf den saghas $y = a^x$, do $a > 1$. Is iad $y = 2^x$ agus $y = 3^x$ na samplaí atá ins an léaráid seo (is é $y = 3^x$ an ceann atá nios airde ar an taobh deimhneach den phictiúir).



Má tá $a = 1$, tá $a^x = 1$ do ghach x agus is feidhm tairiseach leis an luach 1 atá i gceist le 1^x. Má tá $a > 1$, tá luachanna na feidhme $f(x) = a^x$ deimhneacha agus ag méadú ar na réaduimhreacha go léir. Má tá $0 < a < 1$, tá luachanna na feidhme a^x deimhneacha agus ag laghdú ar na réaduimhreacha go léir. Léirítear an graf $y = (\frac{1}{2})^x$ ins an phictiúir thíos.



Tá uimhir amháin a ann ionas go bhfuil fána an líne tadhlaí don ghraf $y = a^x$ cothrom le 1. Tugtar e (uimhir Euler) ar an uimhir speisialta seo, agus is uimhir neamhcoimheasta é atá idir 2 agus 3; $e \approx 2.718$. An gné speisialta a bhaineann le e ná gur ionann an fheidhm e^x agus a díorthach féin :

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x.$$

Glaotar an *bonn nádúrtha* do feidhmeanna easpónantúla ar an uimhir e, agus glaotar an fheidhm easpónantúil ar e^x.

Sampla 3.1.3. *Má tá $f(x) = e^{3x}$, céard é $f'(x)$?*

Réitiú: Is féidir an chuingriail a úsáid anseo :

$$\frac{d}{dx}(e^{3x}) = e^{3x}\frac{d}{dx}(3x) = 3e^{3x}.$$

Sainmhíniú 3.1.4. *Is é an logartam nádúrtha an fheidhm inbhéarta do e^x. Má tá $y = e^x$, glaotar logartam y ar an uimhir x, agus scríobhtar $x = \ln y$.*

Samplaí

1. $e^{\ln 5} = 5$.
2. $\ln 1 = 0$, mar tá $e^0 = 1$.
3. Má tá $e^{3x+2} = 6$, tá $3x + 2 = \ln 6$ agus tá $x = \frac{1}{3}(\ln 6 - 2)$.
4. Má tá $e^{x^2+2} = 5$, tá $x^2 + 2 = \ln 5$ agus tá $x^2 = \ln 5 - 2$. Tá $x = \pm\sqrt{\ln 5 - 2}$.

Abair $y = \ln x$. Ansin tá $e^y = x$, agus is féidir an dá taobh den cothromóid seo a difreáil maidir le x. Chun é seo a dhéanamh le e^y, caithtear an chuingriail a úsáid, agus faightear

$$\begin{aligned} e^y &= x \\ \implies e^y \frac{dy}{dx} &= 1 \\ \implies \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{e^y} \\ \implies \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Ansin, is é $\frac{1}{x}$ an díorthach de $\ln x$. Tugtar *difreáil infhillte* ar an bpróiseas thuas.

3.2 Frithdhíorthaigh

Sainmhíniú 3.2.1. *Má tá* $f'(x) = g(x)$, *deirtear gur frithdhíorthach do* $g(x)$ *é* $f(x)$.

Samplaí

1. Is frithdhíorthach do 2x é x^2, mar tá $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$.
2. Is frithdhíorthach do 2x é $x^2 + 1$ freisin, mar tá $\frac{d}{dx}(x^2 + 1) = 2x$.
3. Is frithdhíorthach do 2x é feidhm ar bith den fhoirm $x^2 + C$ freisin, le uimhir tairiseach C ar bith, mar tá $\frac{d}{dx}(x^2 + C) = 2x$. Is é $x^2 + C$ an *frithdhíorthach ghinireálta* do 2x. Is féidir frithdhíortach áirithe a roghnú má thugtar luach áirithe don C seo, mar shampla 0 (x^2), nó 1 ($x^2 + 1$), nó 10 ($x^2 + 10$).

Sampla 3.2.2. *Faigh an frithdhíorthach ghinireálta do na feidhmeanna seo a leanas.*

$$(a)\ \cos 2x \quad (b)\ e^{3t} \quad (c)\ e^{-t}$$

Réitiú: Ins an fadhb seo, táimíd ag iarraidh "dul ar ais" ón díorthach go dtí an feidhm fhéin. Tá an tasc seo níos deacra ná an difreáil, mar níl rialacha i bhfeidhm a threoraíonn an phróiseas. Caithfear sórt tuairimíocht agus ceartúchán a úsáid lena chéile.

(a) Táimíd ag iarraidh rud a scríobh síos atá $\cos 2x$ mar díorthach ann. Tá a fhios againn go bhfuil "cos" mar díorthach ag "sin", agus ansin is rud cosúil le $\sin 2x$ atá de dhíth orainn. Féach ar díorthach $\sin 2x$:

$$\frac{d}{dx}(\sin 2x) = \cos 2x \times \frac{d}{dx}(2x) = 2\cos 2x.$$

Ansin níl $\sin 2x$ go hiomlán ceart : má tosaimid le $\sin 2x$, faighimid $2\cos 2x$ mar díorthach. Táimíd ag iarraidh $\cos 2x$ a fháil, ansin ba cheart dúinn tosnú le $\frac{1}{2}\sin 2x$. Ansin

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right) = \frac{1}{2}\cos 2x \times \frac{d}{dx}(2x) = \cos 2x.$$

Is frithdhíorthach do $\cos 2x$ é $\frac{1}{2}\sin 2x$, agus is é $\frac{1}{2}\sin 2x + C$ an *frithdhíorthach ghinireálta* do $\cos 2x$.

(b) Táimíd ag iarraidh rud a scríobh síos atá e^{3t} mar díorthach ann. Tá a fhios againn go bhfuil e^t mar díorthach ag e^t maidir le t, agus ansin is rud cosúil le e^{3t} atá de dhíth orainn. Féach ar díorthach e^{3t} :

$$\frac{d}{dt}e^{3t}) = e^{3t} \times \frac{d}{dt}(3t) = 3e^{3t}.$$

Ansin níl e^{3t} go hiomlán ceart : má tosaimid le e^{3t}, faighimid $3e^{3t}$ mar díorthach : tá an factoóir 3 sa bhreis ann. Táimíd ag iarraidh e^{3t} amháin a fháil, ansin ba cheart dúinn tosnú le $\frac{1}{3}e^{3t}$. Ansin

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{3}e^{3t}\right) = \frac{1}{3}e^{3t} \times \frac{d}{dt}(3t) = e^{3t}.$$

Is frithdhíorthach do e^{3t} é $\frac{1}{3}e^{3t}$, agus is é $\frac{1}{3}e^{3t} + C$ an *frithdhíorthach ghinireálta* do e^{3t}.

(c) Tá an sampla seo go han-cosúil le (b) thuas. Is rud cosúil le e^{-t} atá de dhíth orainn, ach má thosaimid le e^{-t}, faighimid

$$e^{-t}\frac{d}{dt}(-t) = -e^{-t}$$

mar díorthach. Ní $-e^{-t}$ ach e^{-t} atá de dhíth orainn, dá bhrí sin ba cheart dúinn tosnú le $-e^{t}$ in áit e^{-t}. Ansin,

$$\frac{d}{dt}(-e^{-t}) = -e^{-t}\frac{d}{dt}(-t) = -e^{-t} \times (-1) = e^{-t}.$$

Conclúid: Is frithdhíorthach do e^{-t} é $-e^{-t}$, agus is é $-e^{-t} + C$ an *frithdhíorthach ghinireálta* do e^{-t}.

3.3 Feidhmeanna easpónantúla san Eolaíocht

Sampla 3.3.1. *I dturgnamh bitheolaíochta, tugtar* $N(t)$ *ar daonra na bactéir ag an am* t*, agus sásaítear an cothromóid difreálach*

$$\frac{dN}{dt} = e^{2t}.$$

Tá $N(0) = 500$*, agus in uair a comhairítear* t*. Faigh daonra na bactéir tar éis cúig uair.*

Réitiú: Tá orainn foirmle do $N(t)$ a fháil agus é a luacháil ansin ag $t = 5$. Tá a fhios againn go bhfuil

$$\frac{dN}{dt} = e^{2t},$$

agus ansin is frithdhíorthach é $N(t)$ do e^{2t}. Ansin, tá

$$N(t) = \frac{1}{2}e^{2t} + C,$$

le uimhir tairiseach éigin C. Tugann an *coinníoll tosaigh* $N(0) = 500$ an luach ceart do C dúinn.

$$N(0) = \frac{1}{2}e^{0} + C = \frac{1}{2} + C = 500 \implies C = 499.5$$

Ansin tá $N(t) = \frac{1}{2}e^{2t} + 499.5$, agus tá

$$N(5) = \frac{1}{2}e^{2\times 5} + 499.5 = \frac{1}{2}e^{10} + 499.5 \approx \frac{1}{2}(22026) + 499.5 \approx 11512.$$

Sampla 3.3.2.

Tá 5730 bliain mar leathré ag carbón-14. Nuair atá orgánach beo, fanann an coibhneas idir carbón-14 agus carbón-12 ina chorp tairiseach, ach tar éis bás an orgánaigh, tosaíonn leibhéal $y(t)$ *an carbón-14 ag laghdú de réir meath easpónantúil. Dá bhrí sin, is féidir an carbón-14 a úsáid chun an aois atá ag sampla áirithe a aimsiú. Sásaítear an cothromóid*

$$y(t) = y_0 e^{-kt}.$$

Is é y_0 *leibhéal an carbón-14 ag bás an orgánaigh, agus is uimhir deimhneach é* k*. I sampla áirithe, tá 90% den bun-léibhéal de carbón-14 fágtha. Cén aois atá ag an sampla?*

Nóta: Nuair atá ábhar radaighníomhach ag meath, tá leath den méid a bhí ann ar dtús fágtha tar éis leathré amháin.
Réitiú: Is é $y(t)$ an méid de carbón-14 atá fágtha san orgánach ag am t. Tá a fhios againn gur 5730 bliain é leathré an carbóin-14, agus go bhfuil $y(0) = y_0$, ansin tá

$$y(5730) = y_0 e^{-k(5730)} = 0.5y_0.$$

Is féidir y_0 a chealllú anseo chun $e^{-5730k} = 0.5$ a scríobh. Ansin tá $-5730k = \ln(0.5)$ agus tá

$$k = \frac{\ln(0.5)}{-5730} = \frac{\ln(0.5)}{-5730}.$$

Ansin tá $y(t) = y_0 e^{\frac{\ln(0.5)}{-5730}t}$. Táimíd ag iarraidh luach de t a fháil ionas go bhfuil $y(t) = 0.9y_0$. Ansin tá

$$y(t) = y_0 e^{\frac{\ln(0.5)}{-5730}t} = 0.9y_0 \implies e^{\frac{\ln(0.5)}{-5730}t} = 0.9 \implies \frac{\ln(0.5)}{-5730}t = \ln 0.9 \implies t = \ln 0.9 \times \frac{-5730}{\ln(0.5)} \approx 871.$$

Tá an sampla timpeall 871 bliain d'aois.

Sampla 3.3.3. *I dturgnamh bitheolaíochta, tá 12g de giosta i láthair ag am* $t = 0$*, agus tar éis deich nóiméad (*$t = 10$*) tá 15g ann. Tá an mais* $M(t)$ *ag méadú de réir an cothromóid*

$$\frac{dM}{dt} = kM,$$

le uimhir tairiseach k*. Ag cén am a mbeidh 24g de giosta ann?*

Réitiú: An príomhrud atá le déanamh anseo ná an cothromóid $\frac{dM}{dt} = kM$ a úsáid chun cur síos a thabhairt ar M. Deireann an cothrmóid seo gur ionann díotthach M agus kM, agus ciallaíonn an ráiteas seo go bhfuil

$$M(t) = Ae^{kt},$$

le uimhir éigin A. Is féidir an eolas atá ins an cheist a úsáid chun A agus k a luacháil. Ag $t = 0$:

$$M(0) = Ae^0 = A = 12.$$

Ansin tá $M(t) = 12e^{kt}$ agus ag $t = 10$ tá

$$M(10) = 12e^{k\times 10} = 12e^{10k} = 15 \Longrightarrow e^{10k} = \frac{15}{12} \Longrightarrow 10k = \ln\left(\frac{15}{12}\right).$$

Ansin tá $k = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{15}{12}\right)$ agus tá

$$M(t) = 12e^{\frac{1}{10}\ln\left(\frac{15}{12}\right)t}$$

Nuair atá $M(t) = 24$, tá

$$\begin{aligned}
12e^{\frac{1}{10}\ln\left(\frac{15}{12}\right)t} &= 24 \\
\Longrightarrow e^{\frac{1}{10}\ln\left(\frac{15}{12}\right)t} &= 2 \\
\Longrightarrow \frac{1}{10}\ln\left(\frac{15}{12}\right)t &= \ln 2 \\
\Longrightarrow t &= 10 \times \ln 2 \times \frac{1}{\ln\left(\frac{15}{12}\right)} \approx 31.
\end{aligned}$$

Beidh 24g ann tar éis timpeall 31 nóiméad.

Glossary

f tar éis g f after g, page 17

éagóimheasta irrational, page 2

Éaguimsithe Unbounded, page 4

éigríoch infinity, page 14

íomhá image, page 6

íoslaghdú minimize, page 30

íosluach minimum value, page 26

íosluach logánta local minimum, page 26

achar area, page 22

achar dromchla surface area, page 30

ainmneoir denominator, page 11

ais axis, page 2

ais axis, page 6

aon le haon one-to-one, page 17

aonadciorcal unit circle, page 8

Aontas Union, page 5

asamtóit cothrománach horizontal asymptote, page 15

ascalach oscillating, page 14

Ball Element, page 4

Barrtheilgeach surjective, page 4

cóimheasta rational, page 2

cónasctha connected, page 2

ceartingearach vertical, page 2

ceartingearach vertical, page 6

comhordanáid coordinate, page 6

comhshíneas cosine, page 8